ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«УДМУРТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

На правах рукописи

СОЛОВЬЕВА НАДЕЖДА АЛЕКСАНДРОВНА

ГРУППОВОЕ ПРЕСЛЕДОВАНИЕ В РЕКУРРЕНТНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ

01.01.02 —дифференциальные уравнения,
динамическое управление и оптимальное управление
Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор
Петров Н.Н.

Ижевск – 2016

Оглавление

Введение

Актуальность и степень разработанности темы исследования. Теория дифференциальных игр изучает задачи конфликтного управления при наличии двух или более сторон, движения которых описываются дифференциальными уравнениями. Практические задачи из области экономики, экологии, биологии, управления механическими системами, а также военного дела являются лишь некоторыми приложениями теории дифференциальных игр.

Одной из первых работ следует считать работу Г. Штейнгауза [132], опубликованную в 1925 году, в которой он сформулировал задачу преследования.

Теория дифференциальных игр начала развиваться в начале 50–х годов. Одними из первых серьезных исследований являются работы американского математика Р. Айзекса, который и ввел термин «дифференциальная игра». Он в своей монографии [3] развил оригинальный метод решения весьма общих дифференциальных игр, рассмотрел целый ряд прикладных задач и получил интересные результаты.

В нашей стране динамические задачи конфликтного управления рассматриваются с начала 60–х годов прошлого века и связаны с именами советских математиков Н.Н. Красовского [43–45], Л.С. Понтрягина [79–84], Л.А. Петросяна [71, 72], Б.Н. Пшеничного [85–88].

Среди работ зарубежных авторов конца 60-х – начала 70-х годов прошлого века отметим работы L.D. Berkovitz, A. Blaqui‘ere, J.V. Breakwell, W.H. Fleming, A. Friedman, G. Leitmann, A.W. Merz (см. [120, 121, 125, 128] и библиографию к ним). В них рассматривались теоремы существования функции цены в подходящем классе стратегий, и развивался метод Р. Айзекса решения дифференциальных игр при помощи построения сингулярных поверхностей.

Крупный вклад в развитии теории дифференциальных игр внесли А.А. Азамов, Э.Г. Альбрехт, В.Д. Батухтин, М.С. Габриэлян, Р.В. Гамкрелидзе, Н.Л. Григоренко, П.Б. Гусятников, В.И. Жуковский, Д. Зонневенд, Р.П. Иванов, А.Ф. Клейменов, А.Н. Красовский, А.В. Кряжимский, А.Б. Куржанский, В.Н. Лагунов, Ю.С. Ледяев, Дж. Лейтман, Н.Ю. Лукоянов, А.В. Мезенцев, А.А. Меликян, Е.Ф. Мищенко, М.С. Никольский, Ю.С. Осипов, В.В. Остапенко, А.Г. Пашков, В.С. Пацко, Н.Н. Петров, Н.Никандр. Петров, Г.К. Пожарицкий, Е.С. Половинкин, И.С. Раппопорт, Б.Б. Рихсиев, Н.Ю. Сатимов, А.И. Субботин, Н.Н. Субботина, В.Е. Третьяков, В.Н. Ушаков, В.И. Ухоботов, А.Г. Ченцов, Ф.Л. Черноусько, А.А. Чикрий, С.В. Чистяков, Р. Эллиот, Л.П. Югай и многие другие математики (см. [1,2,24–30,38–40,42,49,50,52–59,62,92,96,99,103,107–109,111,128] и библиографию к ним).

В 1974 году была опубликована книга Н.Н. Красовского и А.И. Субботина «Позиционные дифференциальные игры» [45]. В ней, в частности, предложена позиционная формализация дифференциальных игр и доказана теорема об альтернативе, родственная теореме существования функции цены. Рассматривается управляемая система, текущие состояния которой описываются ее фазовым вектором $x = x(t)$, изменяющимся во времени t в соответствии с дифференциальным уравнением движения

$$\dot{x} = f(t, x, u, v),$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in P$, $v \in Q$, $P \subset \mathbb{R}^m$ и $Q \subset \mathbb{R}^k$ замкнутые множества, f— непрерывная функция. В пространстве $\mathbb{R}^n$ заданы замкнутые множества M_c и N. Формулируется игра сближения–уклонения, которая складывается из двух задач. Первая задача (стоящая перед первым игроком) — задача о сближении с целевым множеством M_c внутри заданных ограничений N; вторая задача (стоящая перед вторым игроком) — задача об уклонении вектора x от M_c.

«Центральный результат составляет теорема об альтернативе, которая утверждает, что при выполнении локального условия седловой точки маленькой игры в стандартной игре сближения–уклонения для всякой начальной позиции

$\{t_0, x_0\}$ справедливо одно из двух утверждений: либо существует позиционная стратегия первого игрока–союзника, которая обеспечивает встречу движения $x[t]$ с назначенной целью M_c, как бы ни действовал второй игрок–противник, либо существует позиционная стратегия второго игрока–союзника, которая обеспечивает уклонение движения $x[t]$ от указанной цели M_c, как бы ни действовал первый игрок–противник.» [45, с. 14].

Идею рассматривать дифференциальную игру с двух точек зрения предложил и развил Л.С. Понтрягин [79]. В работе [80] Л.С. Понтрягиным получены достаточные условия для возможности завершения преследования в линейных дифференциальных играх. В своей работе [81] он использовал формализм принципа максимума — одного из центральных методов математической теории управления. Основной результат заключается в описании множества начальных позиций, из которых гарантируется возможность завершения преследования, а также в вычислении времени преследования, и способ формирования управления преследователя, реализующего процесс преследования.

Б.Н. Пшеничным [87] были рассмотрены нелинейные дифференциальные игры общего вида, для которых им предложена процедура, определяющая необходимые и достаточные условия разрешимости задачи преследования. Интересные результаты получены при исследовании линейных дифференциальных игр [88].

В теории дифференциальных игр более общей является ситуация, когда в игре принимают участие несколько преследователей и один или несколько убегающих. В этом случае дифференциальная игра называется дифференциальной игрой многих лиц. Такие игры охватывают многие задачи, например, задачу убегания одного управляемого объекта от группы преследователей, задачу избежания столкновения с несколькими препятствиями и другие. Задаче преследования в дифференциальных играх многих лиц посвящены работы Н.Л. Григоренко [24], Б.Н. Пшеничного [87], А.И. Чикрия и И.С. Раппопорта [115], Н. Сатимова и М.Ш. Маматова [96], П.Б. Гусятникова [29].

Одной из первых работ, посвященных задаче группового преследования, была работа Л.А. Петросяна [72], где было введено понятие стратегии параллельного преследования.

В работе Б.Н. Пшеничного [87] рассматривалась задача простого преследования группой преследователей одного убегающего, при условии, что скорости убегающего и преследователей по норме не превосходят единицы. Были получены необходимые и достаточные условия поимки: поимка происходит тогда и только тогда, когда начальная позиция убегающего принадлежит внутренности выпуклой оболочки начальных позиций преследователей.

Ф.Л. Черноусько [107] рассматривал задачу уклонения управляемой точки, скорость которой ограничена по величине, от встречи с любым конечным числом преследующих точек, скорости которых также ограничены по величине и строго меньше скорости уклоняющейся точки. Был построен такой способ управления, который обеспечивает уклонение от всех преследователей на конечное расстояние, причем движение уклоняющейся точки остается в фиксированной окрестности заданного движения.

Р.П. Иванов [39] рассмотрел задачу простого преследования группой преследователей одного убегающего при условии, что убегающий не покидает пределы выпуклого компакта с непустой внутренностью. Было доказано, что если число преследователей меньше размерности множества, то будет уклонение, иначе — поимка и получена оценка времени поимки. Работа Н.Н. Петрова [58] обобщает результат Р.П. Иванова на случай, когда убегающий не покидает пределы выпуклого многогранного множества с непустой внутренностью.

Н.Л. Григоренко [24] получил необходимые и достаточные условия уклонения от встречи одного убегающего от нескольких преследователей при условии, что убегающий и преследователи обладают простым движением, и множество управлений каждого из игроков — один и тот же выпуклый компакт.

В работе [114] А.А. Чикрием и П.В. Прокоповичем рассматривалась задача уклонения группы из m убегающих от группы из n преследователей, в которой закон движения каждого из участников имеет вид

$$\dot{z} = Az + w, \ w \in V, \ z \in \mathbb{R}^k,$$

где A — квадратная матрица, V — выпуклый компакт, $k \geqslant 2$. В терминах начальных позиций и параметров игры были получены достаточные условия уклонения хотя бы одного убегающего от группы преследователей из заданных начальных позиций и из любых начальных позиций (в последнем случае предполагается, что величины n, m фиксированы).

В работе [96] Н. Сатимов и М.Ш. Маматов рассмотрели задачу преследования группой преследователей группы убегающих при условии, что преследователи обладают простым движением с единичной по норме максимальной скоростью и убегающие, кроме того, используют одно и то же управление (жестко скоординированные убегающие). Цель группы преследователей — поймать хотя бы одного убегающего. Были приведены достаточные условия поимки. Работы Д.А. Вагина и Н.Н. Петрова [19, 59] дополняют предыдущую работу.

Н.Н. Петров и В.А. Прокопенко [63] рассматривали задачу простого преследования группой преследователей группы убегающих при условии, что скорости всех участников по норме не превосходят единице, каждый преследователь ловит не более одного убегающего, а убегающие в начальный момент времени выбирают свое управление на интервале $[0; \infty)$. Были получены необходимые и достаточные условия поимки.

В работе [106] Б.К. Хайдаров рассмотрел задачу позиционной l–поимки одного убегающего группой преследователей при условии, что каждый из игроков обладает простым движением. Н.Л. Григоренко [25] получил необходимые и достаточные условия r–поимки одного убегающего группой преследователей при условии, что все игроки обладают простым движением с максимальной по норме скоростью, равной единице. А.А. Чикрием [110] были получены достаточные условия многократной поимки в конфликтно–управляемых процессах. В работах [11, 13, 14, 17] А.И. Благодатских приводит достаточные условия многократной, нестрогой одновременной и одновременной многократной поимок; в частности, для задачи простого группового преследования с равными возможностями получены необходимые и достаточные условия одновременной многократной поимки. В работе [10] введено понятие и получены необходимые и достаточные условия многократной и одновременной многократной поимок в задаче простого группового преследования с равными возможностями при наличии третьей группы участников — защитников убегающих.

Обобщением задачи простого преследования является пример Понтрягина [79]. В работе [56] Н.Н. Петров рассмотрел задачу преследования группой преследователей одного убегающего в примере Понтрягина с равными динамическими и инерционными возможностями игроков. Были получены достаточные условия поимки. В работе [53] рассмотрена задача о многократной поимке одного убегающего группой преследователей в примере Понтрягина с фазовыми ограничениями. Задача преследования жестко скоординированных убегающих группой преследователей в примере Понтрягина при равных динамических и инерционных возможностях участников рассмотрена в [20]. Получены достаточные условия поимки хотя бы одного убегающего. В работе [55] Н.Н. Петров рассмотрел задачу преследования группой преследователей группы убегающих в примере Понтрягина с равными динамическими и инерционными возможностями игроков при условии, что каждый преследователь ловит не более одного убегающего, а убегающие в начальный момент времени выбирают свое управление на интервале $[0; \infty)$ и не покидают пределы множества D.

Б.Т. Саматов в работах [94, 95] рассмотрел задачу преследования–убегания для случая, когда на класс управлений преследователя налагается интегральное ограничение, допускающее линейное изменение с течением времени, которое является обобщением как интегральных, так и геометрических ограничений, а на класс управлений убегающего только геометрическое. При этом задача оптимального преследования решается посредством обобщенной стратегии параллельного преследования, а в задаче убегания устанавливаются нижние оценки для расстояния между преследователем и убегающим.

В своих работах С.А. Ганебный, С.С.Кумков, С.Ле Менек, В.С. Пацко [23,46,47] рассмотрели дифференциальную игру с двумя догоняющими и одним убегающим. Динамика каждого из объектов описана линейной стационарной системой общего вида со скалярным управляющим воздействием. Платой является минимум из двух одномерных промахов между первым преследователем и убегающим и между вторым преследователем и убегающим. Промахи подсчитываются в фиксированные заранее моменты времени. Описывается способ построения множеств уровня функции цены (множеств разрешимости игровой задачи) для различных вариантов параметров задачи. Для случая "сильных" преследователей даются способы построения оптимальных стратегий.

Цель и задачи исследования. Цель данной работы состоит в получении условий разрешимости новых классов игровых задач группового преследования при дополнительных, типа «фазовых», ограничениях на состояние убегающего. В диссертации исследуются следующие задачи: задача преследования группой преследователей одного или нескольких убегающих в линейных нестационарных дифференциальных играх при условии, что фундаментальная матрица однородной системы является рекуррентной по Зубову; задача группового преследования одного убегающего в нестационарном примере Л.С. Понтрягина при условии, что некоторые функции, определяемые начальными условиями и параметрами игры, являются рекуррентными по Зубову.

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы для дальнейшего исследования задач группового преследования.

Методология и методы исследования. В работе используются методы теории дифференциальных игр, оптимального управления, выпуклого анализа.

Положения, выносимые на защиту. В работе получены:

1. Достаточные условия поимки группой преследователей одного убегающего в линейных нестационарных дифференциальных играх в предположении, что фундаментальная матрица однородной системы является рекуррентной по Зубову;

2. Достаточные условия поимки хотя бы одного убегающего для линейной нестационарной задачи преследования группой преследователей группы убегающих, при условии, что фундаментальная матрица однородной системы является рекуррентной по Зубову функцией, а все убегающие используют одно и то же управление;

3. Достаточные условия поимки заданного числа убегающих для линейной нестационарной задачи преследования группой преследователей группы убегающих, при условии, что фундаментальная матрица однородной системы является рекуррентной по Зубову функцией и каждый преследователь может поймать не более одного убегающего;

4. Достаточные условия разрешимости задачи преследования в обобщенном нестационарном примере А.С. Понтрягина со многими участниками при одинаковых динамических и инерционных возможностях всех игроков в предположении рекуррентности по Зубову некоторых функций в терминах начальных позиций и параметров игры.

Степень достоверности и апробация результатов. Основные материалы диссертации опубликованы в 14 работах [21, 22, 61, 64–70, 100–102, 129], из них семь публикаций [22, 66–68, 100, 102, 129] опубликованы в ведущих рецензируемых научных журналах и изданиях: российских из Перечня ВАК [22, 66–68, 100, 102] и зарубежных [129], входящих в международную реферативную базу данных Scopus. Все результаты диссертации строго доказаны.

Основные результаты диссертации докладывались на международных и всероссийских конференциях: Международная конференция «Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологий – аль-Хорезми

2012» (Нац. ун-т Узбекистана им. Мирзо Улугбека, Ташкент, 19–22 дек. 2012 г.), Конференция «Дифференциальные уравнения и оптимальное управление», посвященная 90–летию со дня рождения академика Евгения Фроловича Мищенко (Мат. ин-т им. В.А. Стеклова РАН, Москва, 16–17 апреля 2012 г.), Международная конференция по математической теории управления и механике (Мат. ин-т им. В.А. Стеклова РАН, Владимир. гос. ун-т им. Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых, Моск. гос. ун-т им. М.В. Ломоносова, Суздаль, 2013.), Международная конференция «Динамика систем и процессы управления», посвящ. 90–летию со дня рожд. акад. Н.Н. Красовского, (Ин-т математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, 15–20 сент. 2014 г.), II Международный семинар «Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона–Якоби», посв. 70–летию со дня рождения акад. А.И. Субботина (Екатеринбург, 1–3 апреля 2015 г.), Всероссийская конференция с международным участием «Теория управления и математическое моделирование», посвящ. памяти проф. Н.В. Азбелева и проф. Е.Л. Тонкова (ФГБОУ ВПО «Удмуртский государственный университет», Ижевск, 9–11 июня 2015 г.). Тезисы докладов опубликованы в [21, 61, 65, 69, 70, 101]. Результаты обсуждались также на семинаре отдела динамических систем Института математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН (руководители — член-корреспондент РАН В.Н. Ушаков, профессор А.М. Тарасьев; 2016 г.) и на семинарах по дифференциальным уравнениям и теории управления кафедры дифференциальных уравнений УдГУ.

Все основные результаты диссертации автор получил лично. В совместных статьях с научным руководителем [22, 64, 66–68, 129] Петрову Н.Н. принадлежат постановка задачи и общее руководство проводимыми исследованиями. Из результатов работы [22] в диссертацию включена лемма 3, принадлежащая автору.

Основное содержание работы. Диссертация состоит из введения, двух глав, заключения, списка обозначений и списка литературы. Объем работы 96 страниц. Список литературы включает 132 наименований.

Работа посвящена дифференциальным играм преследования с участием двух групп (преследователей и убегающих). Все дифференциальные игры рассматриваются в пространстве $\mathbb{R}^k (k \geqslant 2)$. В первой главе диссертации рассматриваются линейные рекуррентные дифференциальные игры. Первая глава состоит из трех параграфов.

В первом параграфе рассматривается линейная нестационарная задача преследования группой преследователей $P_1, \ldots, P_n$ одного убегающего E с равными динамическими и инерционными возможностями всех участников.

Закон движения каждого из преследователей P_i имеет вид

$$\dot{x}_i = A(t)x_i + u_i,\ u_i \in V.$$

Закон движения убегающего E имеет вид

$$\dot{y} = A(t)y + v,\ v \in V.$$

Здесь и далее $x_i, y, u_i, v \in \mathbb{R}^k,\ i \in I = \{1, 2, \ldots, n\},\ A(t)$ — непрерывная на $[t_0, \infty)$ квадратная матрица порядка $k,\ V$ — строго выпуклый компакт $\mathbb{R}^k$ с гладкой границей. При $t = t_0$ заданы начальные условия

$$x_i(t_0) = x_i^0,\ y(t_0) = y^0,$$

причем $x_i^0 \neq y^0$ для всех i.

Рассмотрим систему с начальными условиями

$$\dot{z}_i = A(t)z_i + u_i - v,\ u_i, v \in V,\ z_i(t_0) = z_i^0 = x_i^0 - y^0.$$

Отметим, что $z_i^0 \neq 0$.

Назовем предысторией управления $v(t)$ убегающего E в момент времени

$t,\ t \in [t_0, \infty)$ множество $v_t(\cdot) = \{v(s), s \in [t_0, t], v -$ измеримая функция.$\}$

Определение 1.1 *Будем говорить, что задана квазистратегия $\mathcal{U}_i$ преследователя P_i, если определено отображение $\mathcal{U}_i(t, z^0, v_t(\cdot))$, ставящее в соответствие начальному состоянию $z^0 = (z_1^0, \ldots, z_n^0)$, моменту t и произвольной предыстории управления $v_t(\cdot)$ убегающего E измеримую функцию $u_i(t) = \mathcal{U}_i(t, z^0, v_t(\cdot))$ со значениями в V.*

При этом предполагается, что должно быть выполнено условие «физической осуществимости», то есть если v^1, v^2 — два допустимых управления убегающего E, причем $v^1(t) = v^2(t)$ для почти всех t, то соответствующие им при отображении $\mathcal{U}_i(t, z^0, v_t(\cdot))$ функции u^1, u^2 также равны почти всюду при $t \geqslant 0$.

Обозначим данную игру через Γ_1.

Определение 1.2 *В игре Γ_1 происходит поимка, если существует момент $T_0 = T(z^0)$, квазистратегии $\mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_n$ преследователей $P_1, \ldots, P_n$, такие, что для любой измеримой функции $v(\cdot)$, $v(t) \in V$, $t \in [0, T_0]$ найдутся номер $q \in \{1, \ldots, n\}$ и момент $\tau \leqslant T_0$ такие, что $z_q(\tau) = 0$.*

Определение 1.3 ([33]) *Функция $F : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^k$ называется рекуррентной по Зубову (далее — рекуррентной), если для любого $\varepsilon > 0$ существует $T(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых $t,\ a \in \mathbb{R}^1$ существует $\tau(t) \in [a, a + T(\varepsilon)]$, для которых выполнено неравенство*

$$\|F(t + \tau(t)) - F(t)\| < \varepsilon.$$

Определение 1.4 *Функция $f : [t_0, \infty) \to \mathbb{R}^k$ называется рекуррентной по Зубову (далее — рекуррентной) на $[t_0, \infty)$, если существует рекуррентная функция $F : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^k$ такая, что $f(t) = F(t)$ для всех $t \in [t_0, \infty)$.*

Обозначим через $\Phi(t)$ фундаментальную матрицу системы

$$\dot{\omega} = A(t)\omega,$$

где $\Phi(t_0) \equiv E$, E — единичная матрица.

Теорема 1.1 *Пусть выполнены следующие условия:*

1. *Матрица $\Phi(t)$ рекуррентна на $[t_0, \infty)$, а ее первая производная равномерно ограничена на $[t_0, \infty)$;*

2. $0 \in \mathrm{Intco}\{z_1^0, \ldots, z_n^0\}$.

Тогда в игре Γ_1 происходит поимка.

Приведен пример системы, в которой фундаментальная матрица является рекуррентной.

Во втором параграфе рассматривается линейная задача преследования группы скоординированных убегающих $E_1, \ldots E_m$. Получены достаточные условия поимки хотя бы одного убегающего в предположении, что убегающие используют одно и то же управление и фундаментальная матрица однородной системы является рекуррентой.

Закон движения каждого из преследователей P_i имеет вид

$$\dot{x}_i = A(t)x_i + u_i,\ u_i \in V.$$

Закон движения каждого из убегающих E_j имеет вид

$$\dot{y}_j = A(t)y_j + v,\ v \in V.$$

Здесь и далее $x_i, y_j, u_i, v \in \mathbb{R}^k,\ i \in I = \{1, \ldots, n\},\ j \in J = \{1, \ldots, m\},\ A(t)$ — непрерывная на $[t_0, \infty)$ квадратная матрица порядка $k,\ V$ — строго выпуклый компакт $\mathbb{R}^k$ с гладкой границей. При $t = t_0$ заданы начальные условия

$$x_i(t_0) = x_i^0,\ y_j(t_0) = y_j^0,$$

причем $x_i^0 \neq y_j^0$ для всех i, j.

Рассмотрим систему с начальными условиями

$$\dot{z}_{ij} = A(t)z_{ij} + u_i - v,\ u_i, v \in V,\ z_{ij}(t_0) = z_{ij}^0 = x_i^0 - y_j^0.$$

Отметим, что $z_{ij}^0 \neq 0$.

Отметим, что действия убегающих можно трактовать следующим образом: имеется центр, который для всех убегающих E_j выбирают одно и то же управление v.

Определение 1.5 *Будем говорить, что задана квазистратегия $\mathcal{U}_i$ преследователя P_i, если определено отображение $\mathcal{U}_i(t, z^0, v_t(\cdot))$, ставящее в соответствие начальному состоянию $z^0 = (z_{11}^0, \ldots, z_{nm}^0)$, моменту t и произвольной предыстории управления $v_t(\cdot)$ убегающих $E_1, \ldots, E_m$ измеримую функцию $u_i(t) = \mathcal{U}_i(t, z^0, v_t(\cdot))$ со значениями в V.*

Обозначим данную игру через Γ_2.

Определение 1.6 *В игре Γ_2 происходит поимка, если существует момент $T_0 = T(z^0)$, квазистратегии $\mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_n$ преследователей $P_1, \ldots, P_n$, такие, что для любой измеримой функции $v(\cdot)$, $v(t) \in V$, $t \in [0, T_0]$ найдутся номера $q \in \{1, \ldots, n\}, p \in \{1, \ldots, m\}$ и момент $\tau \leqslant T_0$ такие, что $z_{qp}(\tau) = 0$.*

Теорема 1.2 *Пусть выполнены следующие условия:*

1. *Матрица $\Phi(t)$ рекуррентна на $[t_0, \infty)$, а ее первая производная равномерно ограничена на $[t_0, \infty)$;*

2. $\mathrm{Intco}\{x_1^0, \ldots, x_n^0\} \cap \mathrm{co}\{y_1^0, \ldots, y_m^0\} \neq \emptyset$.

Тогда в игре Γ_2 происходит поимка.

Третий параграф посвящен поимке заданного числа убегающих. Рассматривается дифференциальная игра $n+m$ лиц: n преследователей $P_1, \ldots, P_n$ и m убегающих $E_1, \ldots E_m$.

Закон движения каждого из преследователей P_i имеет вид

$$\dot{x}_i = A(t)x_i + u_i,\ u_i \in V.$$

Закон движения каждого из убегающих E_j имеет вид

$$\dot{y}_j = A(t)y_j + v_j,\ v_j \in V.$$

Здесь и далее $x_i, y_j, u_i, v_j \in \mathbb{R}^k, i \in I = \{1, \ldots, n\}, j \in J = \{1, \ldots, m\},\ A(t)$ — непрерывная на $[t_0, \infty)$ квадратная матрица порядка $k,\ V$ — строго выпуклый компакт $\mathbb{R}^k$ с гладкой границей. При $t = t_0$ заданы начальные условия

$$x_i(t_0) = x_i^0,\ y_j(t_0) = y_j^0,$$

причем $x_i^0 \neq y_j^0$ для всех i, j.

Цель группы преследователей — поймать не менее чем q $(1 \leqslant q \leqslant m)$ убегающих, при условии, что сначала убегающие выбирают свои управления, а затем преследователи, зная информацию о выборе убегающих, выбирают свои управления, причем каждый преследователь может поймать не более одного убегающего.

Считаем, что $n \geqslant q$.

Рассмотрим систему с начальными условиями

$$\dot{z}_{ij} = A(t)z_{ij} + u_i - v_j,\ u_i, v_j \in V,\ z_{ij}(t_0) = z_{ij}^0 = x_i^0 - y_j^0.$$

Отметим, что $z_{ij}^0 \neq 0$.

Обозначим данную игру через Γ_3.

Определение 1.8 *В игре* Γ_3 *происходит поимка* q *убегающих, если существует момент* $T_0 = T(z^0)$ *такой, что для любой совокупности допустимых управлений* $v_j(t)$ *убегающих* $E_j,\ \ t \in [t_0, T_0]$ *найдутся допустимые управления преследователей* $P_1, \ldots, P_n$

$$u_i(t) = u_i(t, z_{ij}^0, v_j(s), s \in [t_0, T_0]),$$

такие, что существуют множества $N \subset I$, $M \subset J$, $|N| = |M| = q$ *и для каждого номера* $\beta \in M$ *найдутся номер* $\alpha = \alpha(\beta) \in N$ *и момент* $\tau_{\alpha\beta} \in [t_0, T_0]$, *для которых выполнено* $z_{\alpha\beta}(\tau_{\alpha\beta}) = 0$ *и при этом* $\alpha(\beta_1) \neq \alpha(\beta_2)$ *для любых* $\beta_1 \neq \beta_2$.

Теорема 1.3 *Пусть выполнены следующие условия:*

1. *Матрица* $\Phi(t)$ *рекуррентна на* $[t_0, \infty)$, *а ее первая производная равномерно ограничена на* $[t_0, \infty)$;

2. *Для каждого* $s \in \{0, 1, \ldots, q-1\}$ *верно следующее: для любого множества* $N \subset I$, $|N| = n - s$ *найдется такое множество* $M \subset J$, $|M| = q - s$, *что для всех* $\beta \in M$ *выполнено* $0 \in \operatorname{Intco}\{z^0_{\alpha\beta}, \alpha \in N\}$.

Тогда в игре Γ_3 *происходит поимка не менее* q *убегающих.*

Вторая глава посвящена обобщенному примеру Л. С. Понтрягина. В первом параграфе рассматривается нестационарная дифференциальная игра с n преследователями и одним убегающим при одинаковых динамических и инерционных возможностях всех игроков.

Закон движения каждого из преследователей P_i имеет вид

$$x_i^{(l)} + a_1(t)x_i^{(l-1)} + \cdots + a_l(t)x_i = u_i,\ u_i \in V.$$

Закон движения убегающего E имеет вид

$$y^{(l)} + a_1(t)y^{(l-1)} + \cdots + a_l(t)y = v,\ v \in V.$$

Здесь и далее $x_i, y, u_i, v \in \mathbb{R}^k$, $i \in I = \{1, 2, \ldots, n\}$, $a_1(t), \ldots, a_l(t)$ — непрерывные на $[t_0, \infty)$ функции, V — строго выпуклый компакт в $\mathbb{R}^k$ с гладкой границей.

При $t = t_0$ заданы начальные условия

$$x_i^{(q)}(t_0) = x_i^q, \quad y^{(q)}(t_0) = y^q, \quad \text{причем} \quad x_i^0 \neq y^0 \quad \text{для всех} \quad i.$$

Здесь и далее $q = 0, 1, \ldots, l-1$.

Обозначим данную игру через Γ_4.

Рассмотрим систему

$$z_i^{(l)} + a_1(t) z_i^{(l-1)} + \cdots + a_l(t) z_i = u_i - v,\ \ u_i, v \in V.$$

с начальными условиями

$$z_i^{(q)}(t_0) = z_i^q = x_i^q - y^q.$$

Преследователи используют квазистратегии.

Определение 2.2 *В игре Γ_4 происходит поимка, если существует момент $T_0 = T(z^0)$ и квазистратегии $\mathcal{U}_1(t, z^0, v_t(\cdot)), \ldots, \mathcal{U}_n(t, z^0, v_t(\cdot))$ преследователей $P_1, \ldots, P_n$ такие, что для любой измеримой функции $v(\cdot)$, $v(t) \in V$, $t \in [t_0, T(z^0)]$ найдутся номер $\alpha \in \{1, \ldots, n\}$ и момент $\tau \in [t_0, T(z^0)]$ такие, что $z_\alpha(\tau) = 0$.*

Обозначим через $\varphi_q(t, s),\ q = 0, \ldots, l-1,\ (t \geqslant s \geqslant t_0)$ решения уравнения

$$\omega^{(l)} + a_1(t)\omega^{(l-1)} + \cdots + a_l(t)\omega = 0$$

с начальными условиями

$$\omega^{(j)}(s) = 0, \quad j = 0, \ldots, q-1, q+1 \ldots, l-1, \quad \omega^{(q)}(s) = 1.$$

Пусть далее

$$\xi_i(t) = \varphi_0(t, t_0) z_i^0 + \varphi_1(t, t_0) z_i^1 + \ldots + \varphi_{l-1}(t, t_0) z_i^{l-1}.$$

Обозначим $H_i = \{\xi_i(t),\ t \in [t_0, \infty)\}$.

Определим функции:

$$\rho(t,s)=\begin{cases}1, \text{ если } \varphi_{l-1}(t,s)\geqslant 0,\\ -1, \text{ если } \varphi_{l-1}(t,s)<0\end{cases} \quad (t_0\leqslant s\leqslant t),$$

$$\lambda(v,\rho,h_i)=\sup\{\lambda:\ \lambda\geqslant 0,\ v-\lambda\rho h_i\in V\},$$

$$G(t,h_i)=\int_{t_0}^{t}|\varphi_{l-1}(t,s)|\,\lambda(v(s),\rho(t,s),h_i)\,ds.$$

Полагаем далее

$$h=(h_1,h_2,\ldots,h_n),\ D=D_\varepsilon(h_1^0)\times\ D_\varepsilon(h_2^0)\times\cdots\times\ D_\varepsilon(h_n^0).$$

В терминах начальных позиций и параметров игры получены достаточные условия разрешимости задачи преследования.

Пусть

$$T(z^0)=\min\{t\geqslant 0\ :\ \inf_{v(\cdot)}\min_{h\in D}\ \max_{i\in I}\ G(t,h_i)\geqslant 1\}.$$

Доказано, что $T(z^0)<\infty$.

Теорема 2.1 *Пусть выполнены следующие условия:*

1. *Функции* $\xi_i(t)$ *рекуррентны на* $[t_0,\infty)$*;*
2. *Существуют* $h_i^0\in H_i,\ h_i^0\neq 0$ *такие, что* $0\in \operatorname{Intco}\{h_1^0,h_2^0,\ldots,h_n^0\}$*;*
3. *Существуют моменты* $\tau_i\geqslant T(z^0)$ *такие, что*
   (a) $\xi_i(\tau_i)\in D_\varepsilon(h_i^0)$;
   (b) $\inf\limits_{v(\cdot)}\max\limits_{i} G(\tau_i,\xi_i(\tau_i))\geqslant 1$.

Тогда в игре Γ_4 *происходит поимка.*

Следствие 2.1 *Пусть выполнены следующие условия:*

1. *Функции* $\xi_i(t)$ *рекуррентны на* $[t_0,\infty)$*;*
2. $0\in \operatorname{Intco}\{z_1^0,\ldots,z_n^0\}$.

Тогда в игре Γ_4 *происходит поимка.*

Во втором параграфе рассматривается задача преследования группой преследователей одного убегающего при равных динамических и инерционных возможностях игроков. Предполагается, что убегающий в процессе игры не покидает пределы выпуклого многогранного множества, терминальные множества — начало координат.

Движение каждого преследователя P_i описывается уравнением

$$x_i^{(l)} + a_1(t)x_i^{(l-1)} + a_2(t)x_i^{(l-2)} + \ldots + a_l(t)x_i = u_i, \quad u_i \in V,$$

Закон движения убегающего E имеет вид

$$y^{(l)} + a_1(t)y^{(l-1)} + a_2y^{(l-2)} + \ldots + a_l(t)y = v, \quad v \in V,$$

где $x_i, y_j, u_i, v_j \in \mathbb{R}^k$, функции $a_1(t), a_2(t), \ldots, a_l(t)$ непрерывны на промежутке $[t_0, \infty)$, V — строго выпуклый компакт в $\mathbb{R}^k$ с гладкой границей.

В момент $t = t_0$ заданы начальные условия

$$x_i^{(q)}(t_0) = x_i^q, \quad y^{(q)}(t_0) = y^q, \quad \text{причем} \quad x_i^0 - y^0 \notin M_i \quad \text{для всех} \quad i,$$

где M_i — заданные выпуклые компакты. Здесь и далее $i \in I = \{1, 2, \ldots, n\}$, $q = 0, 1, \ldots, l-1$.

Дополнительно предполагается, что убегающий не покидает пределы выпуклого множества

$$B = \{y : y \in \mathbb{R}^k, (p_c, y) \leqslant \mu_c, c = 1, 2, \ldots, r\},$$

с непустой внутренностью, где (a, b) — скалярное произведение векторов a и b, $p_1, \ldots, p_r$ — единичные векторы $\mathbb{R}^k$, $\mu_1, \ldots, \mu_r$ — вещественные числа.

Рассмотрим уравнение

$$z_i^{(l)} + a_1(t)z_i^{(l-1)} + a_2(t)z_i^{(l-2)} + \ldots + a_l(t)z_i = u_i - v,$$

с начальными условиями

$$z_i^{(q)}(t_0) = z_i^q = x_i^q - y^q.$$

Через $\varphi_q(t,s)$ $(t \geqslant s \geqslant t_0)$ обозначим решение уравнения

$$\omega^{(l)} + a_1(t)\omega^{(l-1)} + a_2(t)\omega^{(l-2)} + \ldots + a_l(t)\omega = 0,$$

с начальными условиями

$$\omega(s) = 0, \ldots,\ \omega^{(q-1)}(s) = 0,\ \omega^{(q)}(s) = 1,\ \omega^{(q+1)}(s) = 0, \ldots,\ \omega^{(l-1)}(s) = 0.$$

Пусть далее

$$\xi_i(t) = \varphi_0(t,t_0)z_i^0 + \varphi_1(t,t_0)z_i^1 + \ldots + \varphi_{l-1}(t,t_0)z_i^{l-1},$$

$$\eta(t) = \varphi_0(t,t_0)y^0 + \varphi_1(t,t_0)y^1 + \ldots + \varphi_{l-1}(t,t_0)y^{l-1}.$$

Считаем, что $\xi_i(t) \notin M_i$ для всех $i, t \geqslant t_0$.

Определение 2.4 *В игре* $\Gamma(n,B)$ *происходит поимка, если существует момент* $T(z^0)$, *квазистратегии* $U_1(t,z^0,v_t(\cdot)), \ldots, U_n(t,z^0,v_t(\cdot))$ *преследователей* $P_1, \ldots, P_n$ *такие, что для любой измеримой функции* $v(\cdot)$, $v(t) \in V$, $y(t) \in B, t \in [t_0, T(z^0)]$ *существуют момент* $\tau \in [t_0, T(z^0)]$ *и номер* $\alpha \in I$, *что* $z_\alpha(\tau) \in M_\alpha$.

Пусть

$$\rho(t,s) = \begin{cases} 1,\ \text{если}\ \varphi_{l-1}(t,s) \geqslant 0, \\ -1,\ \text{если}\ \varphi_{l-1}(t,s) < 0 \end{cases} \qquad (t_0 \leqslant s \leqslant t),$$

$$\lambda(v,\mu,b_i)=\sup\{\lambda \mid \ -\lambda\mu(b_i-M_i)\cap(V-v)\neq\emptyset\},$$

$$G(t,v(\cdot),b_i)=\int\limits_{t_0}^{t}|\varphi_{l-1}(t,s)|\lambda(v(s),\rho(t,s),b_i))ds,$$

$$F(t)=\int\limits_{t_0}^{t}|\varphi_{l-1}(t,s)|ds.$$

Предположение 2.1

1. *Функции* $\xi_i(t)$ *являются рекуррентными на* $[t_0,\infty)$;

2. *Функция* $\eta(t)$ *ограничена на* $[t_0,\infty)$;

3. $\lim\limits_{t\to\infty}F(t)=\infty$;

Предположение 2.2 *Существуют моменты* $\tau_i^0\geqslant t_0$, *положительные числа* ε,δ *такие, что*

1. *Для всех* i *и для всех* $h_i\in D_\varepsilon(\xi_i(\tau_i^0))$ *выполнено* $h_i\notin M_i$;

2. *Для всех* $h_i\in D_\varepsilon(\xi_i(\tau_i^0))$ *справедливы неравенства*

$$\min_v\max\Big\{\max_i\lambda(v,+1,h_i),\max_j(p_j,v)\Big\}\geqslant\delta,$$
$$\min_v\max\Big\{\max_i\lambda(v,-1,h_i),\max_j(-p_j,v)\Big\}\geqslant\delta.$$

Определим число T_0 :

$$T_0=\min\{t\geqslant t_0:\ \inf_{v(\cdot)}\min_{h\in D}\max_{i\in I}G(t,v(\cdot),h_i)\geqslant 1\}.$$

Предположение 2.3 *Существуют моменты* $\tau_i\geqslant T_0$ *такие, что*

1. $\xi_i(\tau_i)\in D_\varepsilon(\xi_i(\tau_i^0))$ *для всех* i;

2. $\inf\limits_{v(\cdot)}\max\limits_i G(\tau_i,v(\cdot),\xi_i(\tau_i))\geqslant 1.$

Теорема 2.2 *Пусть выполнены предположения* 2.1, 2.2, 2.3, $r=1$. *Тогда в игре* $\Gamma(n,B)$ *происходит поимка.*

Предположение 2.4 *Существуют* $\tau_i^0 \geqslant t_0$ *такие, что*

$$0 \in \operatorname{Intco}\big\{\xi_i(\tau_i^0) - M_i, i \in I, p_1, \dots, p_r\big\}$$

Рассмотрим множество

$$B_1 = \{x \mid x \in \mathbb{R}^k, (p, x) \leqslant \mu\},$$

где $\mu = \beta_1\mu_1 + \dots + \beta_r\mu_r$.

Предположение 2.5 *Для любого* $h \in D$ *в множестве* $\bigcup\limits_{i=1}^{n}(h_i - M_i)$ *существует* k *линейно независимых векторов.*

Теорема 2.4 *Пусть выполнены предположения* 2.1, 2.4, 2.5 *и существуют* $\tau_i \geqslant T_0$ *такие, что*

1. $\xi_i(\tau_i) \in D_\varepsilon(\xi_i(\tau_i^0))$;

2. $\inf\limits_{v(\cdot)} \max\limits_i G(\tau_i, v(\cdot), \xi_i(\tau_i)) \geqslant 1$ *в игре* $\Gamma(n, B_1)$.

Тогда в игре $\Gamma(n, B_1)$ *происходит поимка.*

Приведен пример, иллюстрирующий полученные условия.

Третий параграф посвящен многократной поимке в рекуррентном примера Понтрягина при одинаковых динамических и инерционных возможностях игроков и фазовыми ограничениями на состояния убегающего.

Определение 2.6 *В игре* $\Gamma(n, B)$ *происходит* m*-кратная поимка (при* $m = 1$ *поимка), если существуют момент* $T(z^0)$*, квазистратегии* $U_1(t, z^0, v_t(\cdot)), \dots, U_n(t, z^0, v_t(\cdot))$ *преследователей* $P_1, \dots, P_n$ *такие, что для любой измеримой функции* $v(\cdot), v(t) \in V$, $y(t) \in B$, $t \in [t_0, T(z^0)]$ *существуют моменты* $\tau_1, \dots, \tau_m \in [t_0, T(z^0)]$*, попарно различные индексы* $i_1, \dots, i_m \in I$*, что* $z_{i_s}(\tau_s) = 0, s = 1, \dots, m$.

Пусть $\Omega(p) = \{(i_1, \dots, i_p) | i_1, \dots, i_p \in I$ и попарно различны$\}$

Предположение 2.6 1. $n \geqslant m + k - 1$;

2. *Функции* $\xi_i(t)$ *являются рекуррентными на* $[t_0, \infty)$;

3. *Функция* $\eta(t)$ *ограничена на* $[t_0, \infty)$;

4. $\lim\limits_{t\to\infty} F(t) = \infty$;

5. $V = D_1(0)$.

Предположение 2.7 *Существуют моменты* $\tau_i^0 \in [t_0, \infty)$ *такие, что для всех* $\Lambda \in \Omega(n-m+1)$ *выполнено включение* $0 \in \operatorname{Intco}\{\xi_j(\tau_j^0), j \in \Lambda, p_1, \ldots, p_r\}$.

Определим число

$$T_0 = \min\{t \geqslant t_0 \mid \min_{v(\cdot)} \min_{h \in D} \max_{\Lambda \in \Omega(m)} \min_{j \in \Lambda} G(t, v(\cdot), h_j) \geqslant 1\}.$$

Предположение 2.8 *Существуют моменты* $\tau_i \geqslant T_0$ *такие, что*

1. $\xi_i(\tau_i) \in D_\varepsilon(\xi_i(\tau_i^0))$ *для всех* i;

2. $\inf\limits_{v(\cdot)} \max\limits_{\Lambda \in \Omega(m)} \min\limits_{j \in \Lambda} G(\tau_j, v(\cdot), \xi_j(\tau_j)) \geqslant 1$.

Теорема 2.5 *Пусть выполнены предположения* 2.6, 2.7, 2.8, $r = 1$. *Тогда в игре* $\Gamma(n, B)$ *происходит* m*-кратная поимка.*

Глава 1. Линейные рекуррентные дифференциальные игры

1.1. Групповое преследование одного убегающего в линейных рекуррентных дифференциальных играх

В пространстве $\mathbb{R}^k (k \geqslant 2)$ рассматривается дифференциальная игра $n+1$ лиц: n преследователей $P_1, \ldots, P_n$ и убегающий E.

Закон движения каждого из преследователей P_i имеет вид

$$\dot{x}_i = A(t)x_i + u_i, \; u_i \in V. \tag{1.1}$$

Закон движения убегающего E имеет вид

$$\dot{y} = A(t)y + v, \; v \in V. \tag{1.2}$$

Здесь и далее $x_i, y, u_i, v \in \mathbb{R}^k, \; i \in I = \{1, 2, \ldots, n\}, \; A(t)$ – непрерывная на $[t_0, \infty)$ квадратная матрица порядка $k, \; V$ — строго выпуклый компакт $\mathbb{R}^k$ с гладкой границей.

При $t = t_0$ заданы начальные условия

$$x_i(t_0) = x_i^0, \; y(t_0) = y^0, \tag{1.3}$$

причем $x_i^0 \neq y^0$ для всех i.

Вместо систем (1.1) – (1.3) рассмотрим систему с начальными условиями

$$\dot{z}_i = A(t)z_i + u_i - v, \; u_i, v \in V, \; z_i(t_0) = z_i^0 = x_i^0 - y^0. \tag{1.4}$$

Отметим, что $z_i^0 \neq 0$.

Назовем предысторией управления $v(t)$ убегающего E в момент времени $t,\ t \in [t_0, \infty)$ множество

$$v_t(\cdot) = \{v(s), s \in [t_0, t], v - \text{измеримая функция.}\}$$

Определение 1.1 *Будем говорить, что задана квазистратегия $\mathcal{U}_i$ преследователя P_i, если определено отображение $\mathcal{U}_i(t, z^0, v_t(\cdot))$, ставящее в соответствие начальному состоянию $z^0 = (z_1^0, \ldots, z_n^0)$, моменту t и произвольной предыстории управления $v_t(\cdot)$ убегающего E измеримую функцию $u_i(t) = \mathcal{U}_i(t, z^0, v_t(\cdot))$ со значениями в V.*

При этом предполагается, что должно быть выполнено условие «физической осуществимости», то есть если v^1, v^2 — два допустимых управления убегающего E, причем $v^1(t) = v^2(t)$ для почти всех t, то соответствующие им при отображении $\mathcal{U}_i(t, z^0, v_t(\cdot))$ функции u^1, u^2 также равны почти всюду при $t \geqslant 0$.

Обозначим данную игру через Γ_1.

Определение 1.2 *В игре Γ_1 происходит поимка, если существует момент $T_0 = T(z^0)$, квазистратегии $\mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_n$ преследователей $P_1, \ldots, P_n$, такие, что для любой измеримой функции $v(\cdot),\ \ v(t) \in V,\ \ t \in [0, T_0]$ найдутся номер $q \in \{1, \ldots, n\}$ и момент $\tau \leqslant T_0$ такие, что $z_q(\tau) = 0$.*

Определение 1.3 ([33]) *Функция $F : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^k$ называется рекуррентной по Зубову (далее — рекуррентной), если для любого $\varepsilon > 0$ существует $T(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых $t,\ a \in \mathbb{R}^1$ существует $\tau(t) \in [a, a + T(\varepsilon)]$, для которых выполнено неравенство*

$$\|F(t + \tau(t)) - F(t)\| < \varepsilon.$$

Если можно выбрать $\tau(t)$ не зависящим от t для всех t, то функция $f(t)$ называется почти периодической.

Определение 1.4 *Функция* $f : [t_0, \infty) \to \mathbb{R}^k$ *называется рекуррентной по Зубову (далее — рекуррентной) на* $[t_0, \infty)$, *если существует рекуррентная функция* $F : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^k$ *такая, что* $f(t) = F(t)$ *для всех* $t \in [t_0, \infty)$.

Лемма 1.1 *Пусть* $0 \in \operatorname{Intco}\{b_1^0, \ldots, b_n^0\}$, *причем* $b_j^0 \neq 0$ *для всех* j. *Тогда существует* $\varepsilon > 0$ *такое, что выполнены следующие условия:*

1. $0 \notin D_{2\varepsilon}(b_i^0)$ *для всех* i, *где* $D_r(a) = \{z : \|z - a\| \leqslant r\}$;
2. *Для любых* $b_1 \in D_{2\varepsilon}(b_1^0), \ldots, b_n \in D_{2\varepsilon}(b_n^0)$ *выполнено*

$$0 \in \operatorname{Intco}\{b_1, \ldots, b_n\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пункт 1 очевидно выполнен. Докажем пункт 2. Множество $\operatorname{co}\{b_1^0, \ldots, b_n^0\}$ является выпуклым многогранником с вершинами в точках b_j^0, $j \in K \subset \{1, \ldots, n\}$ Из условия леммы следует, что $0 \in \operatorname{Intco}\{b_j^0, j \in K\}$. Множество $\operatorname{Intco}\{b_j^0, j \in K\}$ открыто. Следовательно, существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любых $b_j \in D_{2\varepsilon}(b_j^0)$ справедливо $0 \in \operatorname{Intco}\{b_j, j \in K\}$. Так как $\operatorname{Intco}\{b_j, j \in K\} \subset \operatorname{Intco}\{b_1, \ldots, b_n\}$, то получаем утверждения леммы.

Следствие 1.1 *Пусть выполнено условие*

$$\operatorname{Intco}\{b_1^0, \ldots, b_n^0\} \cap \operatorname{co}\{c_1^0, \ldots, c_m^0\} \neq \emptyset.$$

Тогда существует $\varepsilon > 0$ *такое, что*

$$\operatorname{Intco}\{b_1, \ldots, b_n\} \cap \operatorname{co}\{c_1, \ldots, c_m\} \neq \emptyset.$$

для любых $b_1, \ldots, b_n, c_1, \ldots, c_m$ *таких, что* $b_i \in D_{2\varepsilon}(b_i^0), c_j \in D_{2\varepsilon}(c_j^0)$

В дальнейшем считаем, что $\varepsilon > 0$ выбрано в соответствии с леммой 1.1.

Обозначим через $\Phi(t)$ фундаментальную матрицу системы

$$\dot{\omega} = A(t)\omega,$$

где $\Phi(t_0) \equiv E$, E — единичная матрица.

Определим функции

$$\lambda(v,h) = \sup\{\lambda : \ \lambda \geqslant 0, \ -\lambda h \in V - v\} \text{ при } h \neq 0,$$

$$J(t,b) = \int\limits_{t_0}^{t} \lambda(v(s), \Phi(s)b)\, ds.$$

Лемма 1.2 *Пусть выполнены следующие условия:*

1. *Матрица* $\Phi(t)$ *рекуррентна на* $[t_0, \infty)$, *а ее первая производная равномерно ограничена на* $[t_0, \infty)$;

2. $0 \in \operatorname{Intco}\{z_1^0, \ldots, z_n^0\}$.

Тогда существует $T > t_0$ *такое, что для любого допустимого управления* $v(\cdot)$ *существует* $\alpha \in I$ *такое, что* $J(T, z_\alpha^0) \geqslant 1$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Определим два множества

$$\Omega = \{t \geqslant t_0 : \ \Phi(t)z_i^0 \in D_{2\varepsilon}(z_i^0) \text{ для всех } i\},$$
$$Q = \{q \in I : \ \Phi(t)z_q^0 \in D_{2\varepsilon}(z_q^0) \text{ для всех } t \geqslant t_0\}.$$

$\mu(G)$ — мера Лебега множества $G \subset \mathbb{R}^1$. Возможны два случая:

1. $Q = I$. Тогда $\mu(\Omega) = \infty$.

2. $Q \neq I$. Будем считать, что $Q = \emptyset$, то есть значение каждой из функций $\Phi(t)z_i^0$ в некоторый момент не принадлежит шару $D_{2\varepsilon}(z_i^0)$. Докажем, что и в этом случае $\mu(\Omega) = \infty$.

Так как функции $\Phi(t)z_i^0$ являются рекуррентными, то по ε существует $T(\varepsilon)$ такое, что для любого j существует $\tau_j(t_0) \in [t_0 + T(\varepsilon)j; t_0 + T(\varepsilon)j + T(\varepsilon)]$, для которых выполнено неравенство

$$\|\Phi(t_0 + \tau_j(t_0))z_i^0 - \Phi(t_0)z_i^0\| < \varepsilon$$

для всех i.

Пусть

$$\Omega_j = \{t: \ t \in [\tau_j(t_0), \tau_{j+1}(t_0)), \Phi(t_0+t)z_i^0 \in D_{2\varepsilon}(z_i^0) \text{ для всех } i\},$$

$$\mathrm{dist}(D_1, D_2) = \inf_{d_1 \in D_1, d_2 \in D_2} \|d_1 - d_2\|.$$

По условию функции $\dot{\Phi}(t)z_i^0$ равномерно ограничены, то есть найдется такое положительное число M, что

$$\max_{t \in [t_0, \infty)} \|\dot{\Phi}(t)z_i^0\| \leqslant M \text{ для всех } i.$$

Из теоремы о среднем ([41]) имеем, что для любых $t_2 > t_1 > t_0$

$$\|\Phi(t_2)z_i^0 - \Phi(t_1)z_i^0)\| \leqslant \sup_{t \in [t_1, t_2]} \|\dot{\Phi}(t)z_i^0\| \cdot |t_2 - t_1| \leqslant M|t_2 - t_1|.$$

Поэтому, если $\|\Phi(t_2)z_i^0 - \Phi(t_1)z_i^0)\| \geqslant L$, то справедливо неравенство $t_2 \geqslant t_1 + \frac{L}{M}$.

Так как

$$\mathrm{dist}(\partial D_\varepsilon(z_i^0), \partial D_{2\varepsilon}(z_i^0)) = \varepsilon, \ \Phi(t_0 + \tau_j(t_0))z_i^0 \in \mathrm{Int} D_\varepsilon(z_i^0)$$

для всех i, j, то $[\tau_j(t_0), \tau_j(t_0) + \frac{\varepsilon}{M}] \subset \Omega_j$ для всех j. Следовательно, $\mu(\Omega) \geqslant \mu(\bigcup\limits_{j=0}^{\infty} \Omega_j) = \infty$.

В силу леммы 1.1 для любого

$$h = (h_1, h_2, \ldots, h_n) \in D = D_{2\varepsilon}(z_1^0) \times D_{2\varepsilon}(z_2^0) \times \cdots D_{2\varepsilon}(z_n^0)$$

справедливо неравенство

$$\rho(h) = \min_{v \in V} \max_{i \in I} \lambda(v, h_i) > 0.$$

Докажем, что функция ρ непрерывна на D, то есть для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех h, удовлетворяющих неравенству $|h - h^*| < \delta$

выполнено $|\rho(h)-\rho(h^*)|<\varepsilon$.

Рассмотрим разность

$$|\rho(h)-\rho(h^*)| = |\min_{v\in V}\max_{i\in I}\lambda(v,h_i)-\min_{v\in V}\max_{i\in I}\lambda(v,h_i^*)| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{v\in V}|\max_{i\in I}\lambda(v,h_i)-\max_{i\in I}\lambda(v,h_i^*)| \leqslant$$
$$\leqslant \max_{v\in V}\max_{i\in I}|\lambda(v,h_i)-\lambda(v,h_i^*)|.$$

По лемме 1.3.13 ([110]) функция λ непрерывна, поэтому для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что для всех h_i, удовлетворяющих неравенству $|h_i-h_i^*|<\delta$ выполнено $|\lambda(v,h_i)-\lambda(v,h_i^*)|<\varepsilon$. Следовательно, функция ρ непрерывна на D.

Так как D компакт, то получим

$$r=\min_{h\in D}\min_{v\in V}\max_{i\in I}\lambda(v,h_i)=\min_{h\in D}\rho(h)>0.$$

Таким образом, величина

$$\delta=\min_{t\in\Omega}\min_{v\in V}\max_{i\in I}\lambda(v,\Phi(t)z_i^0)\geqslant\min_{h\in D}\min_{v\in V}\max_{i\in I}\lambda(v,h_i)=r>0.$$

Далее

$$\max_{i\in I}J(t,z_i^0)=\max_{i\in I}\int\limits_{t_0}^{t}\lambda(v(s),\Phi(s)z_i^0)\,ds\geqslant\max_{i\in I}\int\limits_{[t_0,t]\cap\Omega}\lambda(v(s),\Phi(s)z_i^0)\,ds\geqslant$$

$$\geqslant\frac{1}{n}\int\limits_{[t_0,t]\cap\Omega}\sum_{i\in I}\lambda(v(s),\Phi(s)z_i^0)\,ds\geqslant\frac{1}{n}\int\limits_{[t_0,t]\cap\Omega}\delta\,ds=\frac{\delta}{n}\mu([t_0,t]\cap\Omega).$$

Отметим, что $\lim\limits_{t\to\infty}\mu([t_0,t]\cap\Omega)=\infty$, так как $\mu(\Omega)=\infty$. Тогда для момента T, определяемого из условия

$$\frac{\delta}{n}\mu([t_0,T]\cap\Omega)\geqslant 1,$$

и некоторого $\alpha \in I$ выполнено $J(T, z^0_\alpha) \geqslant 1$. Лемма доказана.

Пусть

$$T(z^0) = \min\{t \geqslant 0 \ : \ \inf_{v(\cdot)} \min_{h \in D} \max_{i \in I} J(t, h_i) \geqslant 1\}.$$

В силу леммы 1.2 $T(z^0) < \infty$.

Теорема 1.1 *Пусть выполнены следующие условия:*

1. *Матрица $\Phi(t)$ рекуррентна на $[t_0, \infty)$, а ее первая производная равномерно ограничена на $[t_0, \infty)$;*

2. $0 \in \operatorname{Intco}\{z^0_1, \ldots, z^0_n\}$.

Тогда в игре Γ_1 происходит поимка.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По формуле Коши решение задачи (1.4) при любых допустимых управлениях имеет вид

$$z_i(t) = \Phi(t)\left(z^0_i + \int\limits_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)(u_i(s) - v(s))\, ds\right) \text{ для всех } t \geqslant t_0.$$

Пусть $v(\tau),\ t_0 \leqslant \tau \leqslant T_0 = T(z^0)$ — произвольное допустимое управление убегающего E и $t_1 > t_0$ — наименьший корень функции вида

$$F(t) = 1 - \max_{i \in I} \int\limits_{t_0}^{t} \lambda(v(s), \Phi(s) z^0_i)\, ds.$$

Отметим, что, в силу определения T_0, момент t_1 существует и $t_1 \leqslant T_0$.

Задаем управление преследователей P_i следующим образом:

$$u_i(t) = v(t) - \lambda(v(t), \Phi(t) z^0_i)\Phi(t) z^0_i \text{ для всех } t \in [t_0, T_0].$$

Считаем, что $\lambda(v(t), \Phi(t) z^0_i) = 0$ для всех $t \in [t_1, T_0]$. Тогда, с учетом формулы Коши,

$$z_i(t_1) = \Phi(t_1) z^0_i \left(1 - \int\limits_{t_0}^{t_1} \lambda(v(s), \Phi(s) z^0_i)\, ds\right).$$

В силу определения t_1, для некоторого $\alpha \in I$ выражение в скобках обращается в ноль, поэтому $z_\alpha(t_1) = 0$. Теорема доказана.

Замечание 1.1 *Если матрица* $\Phi(t)$ *не является рекуррентной, то условие* 2 *не гарантирует поимку в игре* Γ_1.

Соответствующий пример приведен в [17, с. 119].

Так как всякая почти периодическая функция является рекуррентной, то справедливо

Следствие 1.2 ([15]) *Пусть выполнены следующие условия:*

1. *Матрица* $\Phi(t)$ *почти периодическая на* $[t_0, \infty)$, *а ее первая производная равномерно ограничена на* $[t_0, \infty)$;

2. $0 \in \operatorname{Intco}\{z_1^0, \ldots, z_n^0\}$.

Тогда в игре Γ_1 *происходит поимка.*

Пример 1.1 *Пусть* $A(t) = \omega(t)E$, *где*

$$\omega(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \in [0, 2\pi] \\ \sin t, & \text{если } t \notin [0, 2\pi] \end{cases}$$

Докажем, что функция $\omega(t)$ рекуррентна.

Для любого $\varepsilon > 0$ возьмем $T(\varepsilon) = 4\pi$. Рассмотрим два случая:

1. $t \notin [0, 2\pi]$. Тогда для любого $a \in \mathbb{R}^1$ существует $k \in \mathbb{N}$ такое, что $\tau(t) = 2k\pi \in [a, a + 4\pi]$, для которых выполнено

$$|\omega(t + \tau(t)) - \omega(t)| = |\sin(t + 2k\pi) - \sin(t)| = 0 < \varepsilon$$

2. $t \in [0, 2\pi]$. Тогда для любого $a \in \mathbb{R}^1$ выберем $k \in \mathbb{N}$ такое, что $k\pi \in [a, a + 4\pi]$, а $k\pi + \pi \notin [a, a + 4\pi]$ и существует $\tau(t) = k\pi - t$, $\tau(t) \in [a, a + 4\pi]$, для которых выполнено

$$|\omega(t + \tau(t)) - \omega(t)| = |\omega(k\pi)) - \omega(t)| = 0 < \varepsilon$$

Пусть $t_0 = 0$. Тогда фундаментальная матрица системы $\dot{x} = A(t)x$, $\Phi(0) = E$ имеет вид $\Phi(t) = g(t)E$, где

$$g(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \in [0, 2\pi] \\ e^{-\cos t + 1}, & \text{если } t \in (2\pi, \infty) \end{cases}$$

Функция $g(t)$ является рекуррентной на $[0, \infty)$ и поэтому функция $\Phi(t)$ рекуррентна.

Докажем, что функция $g(t)$ не является почти периодической. Предположим, что функция $g(t)$ почти периодическая. Тогда по $\varepsilon = \frac{1}{2}$ найдется $T > 0$, что в любом промежутке $[a, a+T]$ существует хотя бы одно число τ, при котором

$$|g(t + \tau) - g(t)| < \tfrac{1}{2} \text{ для всех } t.$$

Пусть $\tau \in [2\pi, 2\pi + T]$. Тогда, в частности, для всех $t \in [0, 2\pi]$ справедливо неравенство

$$g(t + \tau) < \frac{3}{2}.$$

С другой стороны, $t + \tau \in [\tau, 2\pi + \tau]$ и поэтому существует t_0, что

$$g(t_0 + \tau) = e^2 > \frac{3}{2}.$$

Получили противоречие. Следовательно, функция g не является почти периодической.

Утверждение 1.1 *Пусть* $A(t) = \omega(t)E$ *и* $0 \in \mathrm{Intco}\{z_1^0, \ldots, z_n^0\}$. *Тогда в игре* Γ_1 *происходит поимка.*

Замечание 1.2 *Отметим, что если* $A(t) \equiv 0$ *для всех* $t \geqslant t_0$, *то* $\Phi(t) = E$ — *рекуррентная функция.*

Следствие 1.3 ([87]) *Пусть* $A(t) \equiv 0$ *и* $0 \in \mathrm{Intco}\{z_1^0, \ldots, z_n^0\}$. *Тогда в игре* Γ_1 *происходит поимка.*

1.2. Поимка группы скоординированных убегающих в линейных рекуррентных дифференциальных играх

В пространстве $\mathbb{R}^k (k \geqslant 2)$ рассматривается дифференциальная игра $n+m$ лиц: n преследователей $P_1, \ldots, P_n$ и m убегающих $E_1, \ldots E_m$.

Закон движения каждого из преследователей P_i имеет вид

$$\dot{x}_i = A(t)x_i + u_i,\ u_i \in V. \tag{1.5}$$

Закон движения каждого из убегающих E_j имеет вид

$$\dot{y}_j = A(t)y_j + v,\ v \in V. \tag{1.6}$$

Здесь и далее $x_i, y_j, u_i, v \in \mathbb{R}^k$, $i \in I = \{1, \ldots, n\}$, $j \in J = \{1, \ldots, m\}$, $A(t)$ — непрерывная на $[t_0, \infty)$ квадратная матрица порядка k, V — строго выпуклый компакт $\mathbb{R}^k$ с гладкой границей. При $t = t_0$ заданы начальные условия

$$x_i(t_0) = x_i^0,\ y_j(t_0) = y_j^0, \tag{1.7}$$

причем $x_i^0 \neq y_j^0$ для всех i, j.

Вместо систем (1.5), (1.6), (1.7) рассмотрим систему с начальными условиями

$$\dot{z}_{ij} = A(t)z_{ij} + u_i - v,\ u_i, v \in V,\ z_{ij}(t_0) = z_{ij}^0 = x_i^0 - y_j^0. \tag{1.8}$$

Отметим, что $z_{ij}^0 \neq 0$.

Отметим, что действия убегающих можно трактовать следующим образом: имеется центр, который для всех убегающих E_j выбирают одно и то же управление v.

Определение 1.5 *Будем говорить, что задана квазистратегия $\mathcal{U}_i$ преследователя P_i, если определено отображение $\mathcal{U}_i(t, z^0, v_t(\cdot))$, ставящее в соот-*

ветствие начальному состоянию $z^0 = (z^0_{11}, \dots, z^0_{nm})$, *моменту* t *и произвольной предыстории управления* $v_t(\cdot)$ *убегающих* $E_1, \dots, E_m$ *измеримую функцию* $u_i(t) = \mathcal{U}_i(t, z^0, v_t(\cdot))$ *со значениями в* V.

Обозначим данную игру через Γ_2.

Определение 1.6 *В игре* Γ_2 *происходит поимка, если существует момент* $T_0 = T(z^0)$, *квазистратегии* $\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_n$ *преследователей* $P_1, \dots, P_n$, *такие, что для любой измеримой функции* $v(\cdot)$, $v(t) \in V$, $t \in [0, T_0]$ *найдутся номера* $q \in \{1, \dots, n\}, p \in \{1, \dots, m\}$ *и момент* $\tau \leqslant T_0$ *такие, что* $z_{qp}(\tau) = 0$.

Через $\Phi(t)$ обозначим фундаментальную матрицу системы

$$\dot{\omega} = A(t)\omega,$$

где $\Phi(t_0) \equiv E$, E — единичная матрица.

Определение 1.7 ([57]) *Векторы* $a_1, a_2, \dots, a_s$ *образуют положительный базис* $\mathbb{R}^k$, *если для любого* $x \in \mathbb{R}^k$ *существуют положительные вещественные числа* $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ *такие, что*

$$x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_s a_s.$$

Лемма 1.3 ([110]) *Пусть* $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}^k$, V *— строго выпуклый компакт с гладкой границей. Следующие утверждения равносильны.*

1. $\delta = \min\limits_{v \in V} \max\limits_i \lambda(v, b_i) > 0$, *где* $\lambda(v, b_i) = \sup\{\lambda : \ \lambda \geqslant 0, \ -\lambda b_i \in V - v\}$
2. *Векторы* $b_1, \dots, b_n$ *образуют положительный базис* $\mathbb{R}^k$;
3. $0 \in \mathrm{Intco}\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$.

Будем предполагать в дальнейшем, что начальные позиции x^0_i, y^0_j таковы, что

1. Если $n > k$, то для любого набора индексов $I \subset \{1, \ldots, n\}$, $|I| \geqslant k+1$ справедливо $\mathrm{Intco}\{x_i^0,\ i \in I\} \neq \emptyset$;

2. Любые $k+1$ точки из набора $\{x_i^0, y_j^0\}$ аффинно независимы.

Теорема 1.2 *Пусть выполнены следующие условия:*

1. *Матрица $\Phi(t)$ рекуррентна на $[t_0, \infty)$, а ее первая производная равномерно ограничена на $[t_0, \infty)$;*

2.
$$\mathrm{Intco}\{x_1^0, \ldots, x_n^0\} \cap \mathrm{co}\{y_1^0, \ldots, y_m^0\} \neq \emptyset. \tag{1.9}$$

Тогда в игре Γ_2 происходит поимка.

Доказательство. Из условия теоремы следует, что $n + m \geqslant k + 2$. Из [19, лемма 8] следует, что существуют множества $I_0 \subset I$, $J_0 \subset J$ такие, что

$$\mathrm{rico}\{x_i^0,\ i \in I_0\} \cap \mathrm{rico}\{y_j^0,\ j \in J_0\} \neq \emptyset$$

и $|I_0| + |J_0| = k+2$. Будем считать, что $I_0 = \{1, \ldots, q\}$, $J_0 = \{1, \ldots, l\}$, причем $q + l = k + 2$.

По лемме 3 работы [19] $\{z_{ij}^0, i \in I_0, j \in J_0\}$ образуют положительный базис. Если $|J_0| = 1$, то поимка следует из теоремы 1.1.

Считаем, что $|J_0| \geqslant 2$. Пусть $c_\alpha^\beta = y_\alpha^0 - y_\beta^0$. Тогда $z_{i\alpha}^0 = z_{i1}^0 + c_1^\alpha$ для всех $i \in I_0$, $\alpha \in J_0$, $\alpha \neq 1$. Поэтому $\{z_{i1}^0, i \in I_0, c_1^\alpha, \alpha \in J_0, \alpha \neq 1\}$ образуют положительный базис. Так как $n \geqslant k+1$, то $q + \alpha - 1 \in \{q+1, \ldots, n\}$ для всех $\alpha \neq 1$, $\alpha \in J_0$.

В силу следствия 1 работы [19] набор

$$\{z_{i,1}^0, i \in I, z_{q+\alpha-1,1}^0 + \mu c_1^\alpha, \alpha \neq 1,\ \alpha \in J_0\} \tag{1.10}$$

образует положительный базис при некотором $\mu > 0$.

Возьмем $\varepsilon > 0$ так, чтобы по отношению к набору (1.10) были справедливы лемма 1.1 и следствие 1.1. В силу леммы 1.2 число

$$T_0 = T(z^0) = \min\{t \geqslant 0 : \inf_{v(\cdot)} \min_{z \in D} \max_s J(t, z_s) \geqslant 1\} \tag{1.11}$$

конечно, где

$$D = D_{2\varepsilon}(z_{11}^0) \times \ldots \times D_{2\varepsilon}(z_{q1}^0) \times D_{2\varepsilon}(z_{q+1,1}^0 + \mu c_1^2) \times \ldots \times D_{2\varepsilon}(z_{q+l-1,1}^0 + \mu c_1^l).$$

Пусть далее $v(\tau), t_0 \leqslant \tau \leqslant T_0$ — произвольное допустимое управление убегающего, $t_1 > t_0$ — наименьший корень функции вида

$$F(t) = 1 - \max_s \int\limits_{t_0}^{t} \lambda(v(s), \Phi(s) w_s^0) ds,$$

где

$$w_s^0 = \begin{cases} z_{s1}^0, \ s \in I_0, \\ z_{q+s-1,1}^0 + \mu c_1^s, \ s \in J_0, s \neq 1 \end{cases}$$

Отметим, что в силу определения T_0 момент t_1 существует и $t_1 \leqslant T_0$.

Задаем управления преследователей следующим образом:

$$u_i(t) = v(t) - \lambda(v(t), \Phi(t) z_{i1}^0) \Phi(t) z_{i1}^0, \ i \in I_0$$

$$u_{q+\alpha-1,1}(t) = v(t) - \lambda(v(t), \Phi(t)(z_{q+\alpha-1,1}^0 + \mu c_1^\alpha)) \Phi(t)(z_{q+\alpha-1}^0 + \mu c_1^\alpha),$$

$$\alpha \in J_0, \alpha \neq 1.$$

Считаем, что $\lambda(v(t), \Phi(t) w_s^0) = 0$ для всех s и $t \in [t_1, T_0]$.

Из системы (1.8) имеем

$$z_{i1}(t) = \Phi(t) z_{i1}^0 h_i(t),\ i \in I_0,$$

$$z_{q+\alpha-1,1}(t) + \mu\Phi(t)c_1^\alpha = \Phi(t)(z_{q+\alpha-1,1} + \mu c_1^\alpha)h_{q+\alpha-1}(t),\ \alpha \in J_0, \alpha \neq 1,$$

где

$$h_s(t) = 1 - \int\limits_{t_0}^{t} \lambda(v(\tau), \Phi(\tau) w_s^0) ds.$$

Из (1.11) следует, что существует номер r такой,что $h_r(T_0) = 0$. Если $r \in I_0$, то в игре Γ_2 происходит поимка. Если $h_{q+r-1}(T_0) = 0$, то $z_{q+r-1,1}(T_0) = -\mu\Phi(T_0)c_1^r$.

Пусть T^0 такой, что $t_0 + T^0 > T_0$. Так как $\Phi(t)$ является рекуррентной функцией, то по ε, выбранному ранее, существует число $T(\varepsilon)$ такое, что на промежутке $[T^0, T^0 + T(\varepsilon))$ найдется число $\tau(t_0)$, для которого справедливо неравенство

$$\|\Phi(t_0 + \tau(t_0)) - \Phi(t_0)\| < \frac{\varepsilon}{M},$$

где

$$M = \max\{\|z_{ij}^0\|, \|z_{q+s-1,1}^0\|, s \in J_0, \|c_1^\alpha\|,\ \alpha \in J_0, \alpha \neq 1\}.$$

Задаем управления преследователей на отрезке $[T_0, T_1]$, где $T_1 = t_0 + \tau(t_0)$, полагая $u_i(t) = v(t)$ для всех i и всех $t \in [T_0, T_1]$.

Тогда будем иметь

$$z_{i1}(T_1) = \Phi(T_1) z_{i1}^0 h_i(T_0), i \in I_0, \tag{1.12}$$

$$z_{q+r-1,1}(T_1) = -\mu\Phi(T_1)c_1^r.$$

Покажем, что

$$\operatorname{rico}\{x_i(T_1), i \in I_0\} \cap \operatorname{rico}\{y_j(T_1), j \in J_0\} \neq \emptyset \tag{1.13}$$

Из (1.12) имеем $\Phi(T_1)z_{i1}^0 = \frac{z_{i1}(T_1)}{h_i(T_1)}$. Кроме того, для всех $\alpha \in J_0, \alpha \neq 1$ справедливо равенство

$$z_{i\alpha}(T_1) = z_{i1}(T_1) + \Phi(T_1)c_1^\alpha = z_{i1}(T_1) + \Phi(T_1)(z_{i\alpha}^0 - z_{i1}^0).$$

Поэтому для всех $\alpha, \alpha \neq 1$

$$\Phi(T_1)z_{i\alpha}^0 = z_{i\alpha}(T_1) - z_{i1}(T_1) + \Phi(T_1)z_{i1}^0 = z_{i\alpha}(T_1) + z_{i1}(T_1)\Big(\frac{1 - h_i(T_1)}{h_i(T_1)}\Big).$$

Так как $\Phi(T_1)z_{i\alpha}^0 \in D_{2\varepsilon}(z_{i\alpha}^0)$ для всех i, α, то система $\{\Phi(T_1)z_{ij}^0,\ i \in I_0, j \in J_0\}$ образует положительный базис $\mathbb{R}^k$. Следовательно, положительный базис образует система $\{z_{ij}(T_1), i \in I_0, j \in J_0\}$. Отсюда получаем (1.13). Так как $\Phi(T_1)c_1^r \in D_{2\varepsilon}(c_1^r)$, то используя лемму 9 работы [19], получаем

$$\mathrm{rico}\{x_i(T_1),\ i \in I_0,\ x_{q+r-1}(T_1)\} \cap \mathrm{rico}\{y_j(T_1),\ j \neq 1,\ j \in J_0\} \neq \emptyset.$$

Считаем, что $r = 2$. Далее полагаем $I_0 = \{1, 2, \ldots, q+1\},\ J_0 = \{2, \ldots, l\}$. Для полученных множеств I_0, J_0 справедливо условие (1.9) при этом число убегающих, участвующих в данном условии, уменьшилось на 1. Принимая момент T_1 за начальный, будем повторять наши рассуждения до тех пор, пока число убегающих не станет равным 1. Получим, что

$$\mathrm{rico}\{x_i(\tau),\ i \in I_0\} \cap \mathrm{rico}\{y_j(\tau),\ j \in J_0\} \neq \emptyset,$$

в некоторый момент $\tau > 0$, причем $|I_0| = k+1, |J_0| = 1$. Теперь поимка следует из теоремы 1.1. Теорема доказана.

Следствие 1.4 ([19]) *Пусть* $A(t) \equiv 0$ *для всех* $t \geqslant t_0$,

$$\mathrm{Intco}\{x_1^0, \ldots, x_n^0\} \cap \mathrm{co}\{y_1^0, \ldots, y_m^0\} \neq \emptyset.$$

Тогда в игре Γ_2 *происходит поимка.*

Пример 1.2 *Рисунки, приведенные ниже иллюстрируют теорему* 1.2.

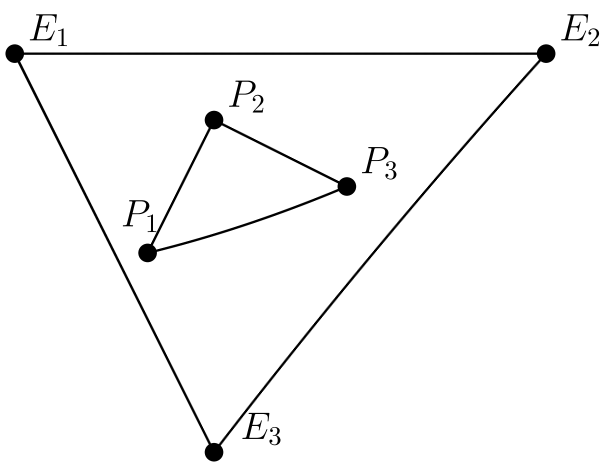

Рис. 1. Поимка группы скоординированных убегающих (начальные позиции).

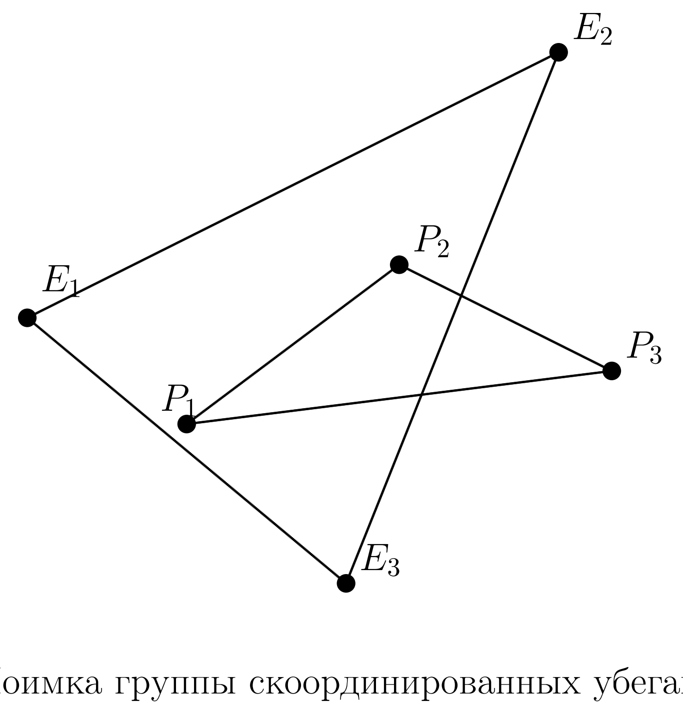

Рис. 2. Поимка группы скоординированных убегающих (шаг 1).

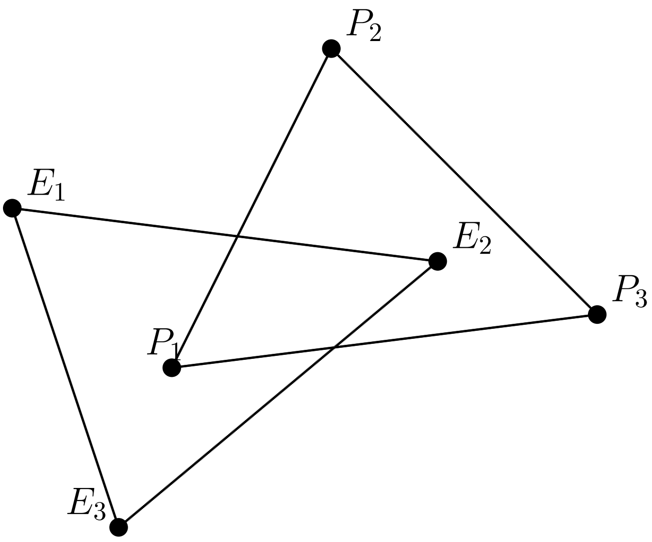

Рис. 3. Поимка группы скоординированных убегающих (шаг 2).

Пример 1.3 *Пусть* $k = 2,\ n = 4,\ m = 2,\ t_0 = 0,\ A(t) \equiv 0,\ V = D_1(0).$

$$x_1^0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, x_2^0 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}, x_3^0 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}, y_1^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, y_2^0 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

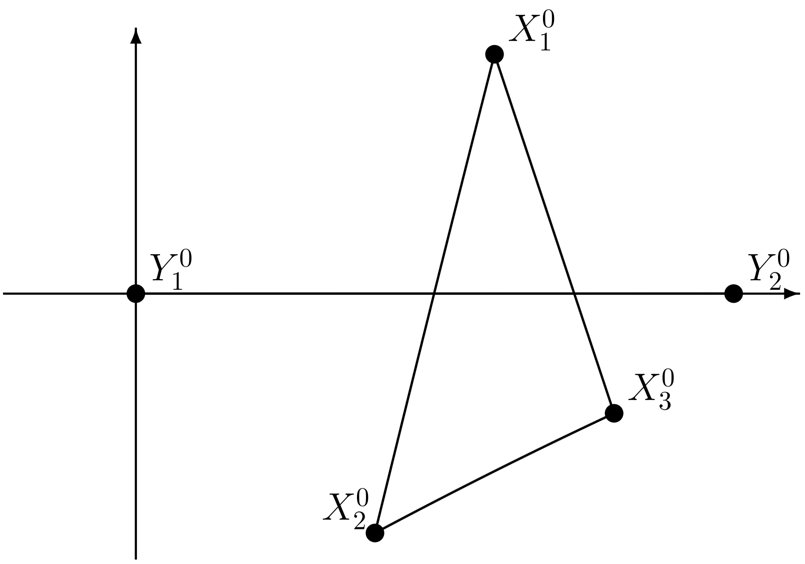

Рис. 4. Поимка двух жесткосоединенных убегающих.

$\Phi(t) = E$ — рекуррентная функция и $\operatorname{Intco}\{x_1^0, x_2^0, x_3^0\} \cap \operatorname{co}\{y_1^0, y_2^0\} \neq \emptyset$, то есть выполнены все условия теоремы 1.2. Важно отметить, что не выполнены условия теоремы Сатимова–Маматова [19]. Однако по теореме 1.2 в игре Γ_2 происходит поимка.

Пример 1.4 *Пусть* $k = 2, t_0 = 0$, *матрица* $A(t)$ *имеет вид*

$$A(t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \cos t & 0 \end{pmatrix}, & t \in [0; 4\pi) \\ \begin{pmatrix} \sin t & 0 \\ \cos t & \sin t \end{pmatrix}, & t \geqslant 4\pi \end{cases}$$

Тогда фундаментальная матрица $\Phi(t)$ имеет вид

$$\Phi(t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sin t & 1 \end{pmatrix}, & t \in [0; 4\pi) \\ \begin{pmatrix} e^{1-\cos t} & 0 \\ \sin t \cdot e^{1-\cos t} & e^{1-\cos t} \end{pmatrix}, & t \geqslant 4\pi \end{cases}$$

Матрица $\Phi(t)$ является рекуррентной.

Утверждение 1.2 *Пусть*

$$\operatorname{Intco}\{x_1^0, \ldots, x_n^0\} \cap \operatorname{co}\{y_1^0, \ldots, y_m^0\} \neq \emptyset.$$

Тогда в игре Γ_2 *происходит поимка.*

1.3. Поимка заданного числа убегающих

В пространстве $\mathbb{R}^k (k \geqslant 2)$ рассматривается дифференциальная игра $n+m$ лиц: n преследователей $P_1, \ldots, P_n$ и m убегающих $E_1, \ldots E_m$.

Закон движения каждого из преследователей P_i имеет вид

$$\dot{x}_i = A(t)x_i + u_i,\ u_i \in V. \tag{1.14}$$

Закон движения каждого из убегающих E_j имеет вид

$$\dot{y}_j = A(t)y_j + v_j,\ v_j \in V. \tag{1.15}$$

Здесь и далее $x_i, y_j, u_i, v_j \in \mathbb{R}^k$, $i \in I = \{1, \ldots, n\}$, $j \in J = \{1, \ldots, m\}$, $A(t)$ — непрерывная на $[t_0, \infty)$ квадратная матрица порядка k, V — строго выпуклый компакт $\mathbb{R}^k$ с гладкой границей. При $t = t_0$ заданы начальные условия

$$x_i(t_0) = x_i^0,\ y_j(t_0) = y_j^0, \tag{1.16}$$

причем $x_i^0 \neq y_j^0$ для всех i, j.

Цель группы преследователей — поймать не менее чем q $(1 \leqslant q \leqslant m)$ убегающих, при условии, что сначала убегающие выбирают свои управления, а затем преследователи, зная информацию о выборе убегающих, выбирают свои управления, причем каждый преследователь может поймать не более одного убегающего.

Считаем, что $n \geqslant q$.

Вместо систем (1.14), (1.15), (1.16) рассмотрим систему с начальными условиями

$$\dot{z}_{ij} = A(t)z_{ij} + u_i - v,\ u_i, v_j \in V,\ z_{ij}(t_0) = z_{ij}^0 = x_i^0 - y_j^0. \tag{1.17}$$

Отметим, что $z_{ij}^0 \neq 0$.

Обозначим данную игру через Γ_3.

Определение 1.8 *В игре Γ_3 происходит поимка не менее q убегающих, если существует момент $T_0 = T(z^0)$ такой, что для любого любой совокупности допустимых управлений $v_j(t)$ убегающих $E_j,\ t \in [t_0, T_0]$ найдутся допустимые управления преследователей $P_1, \ldots, P_n$*

$$u_i(t) = u_i(t, z_{ij}^0, v_j(s), s \in [t_0, T_0]),$$

такие, что существуют множества $N \subset I,\ M \subset J,\ |N| = |M| = q$ и для каждого номера $\beta \in M$ найдутся номер $\alpha = \alpha(\beta) \in N$ и момент $\tau_{\alpha\beta} \in [t_0, T_0]$, для которых выполнено $z_{\alpha\beta}(\tau_{\alpha\beta}) = 0$ и при этом $\alpha(\beta_1) \neq \alpha(\beta_2)$ для любых $\beta_1 \neq \beta_2$.

Через $\Phi(t)$ обозначим фундаментальную матрицу системы

$$\dot{\omega} = A(t)\omega,$$

где $\Phi(t_0) \equiv E$, E — единичная матрица.

Теорема 1.3 *Пусть выполнены следующие условия:*

1. *Матрица $\Phi(t)$ рекуррентна на $[t_0, \infty)$, а ее первая производная равномерно ограничена на $[t_0, \infty)$;*

2. *Для каждого $s \in \{0, 1, \ldots, q-1\}$ верно следующее: для любого множества $N \subset I$, $|N| = n - s$ найдется такое множество $M \subset J$, $|M| = q - s$, что для всех $\beta \in M$*

$$0 \in \mathrm{Intco}\{z_{\alpha\beta}^0, \alpha \in N\}.$$

Тогда в игре Γ_3 происходит поимка не менее q убегающих.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем, что любые $n-s$ преследователей ловят не менее $q-s$ убегающих, где $s \in \{0, 1, \ldots, q-1\}$. При $s = 0$ получим утверждение теоремы.

Пусть $s = q-1$ и $N \subset I$, $|N| = n-s$. В силу условия 2 по N существует $\beta \in J$ такой, что $0 \in \mathrm{Intco}\{z^0_{\alpha\beta}, \alpha \in N\}$. Из теоремы 1.1 следует, что преследователи $P_\alpha, \alpha \in N$ ловят убегающего E_β.

Предположим, что утверждение доказано для всех $s \geqslant s_0 + 1$.

Докажем утверждение при $s = s_0$. Пусть $N \subset I$, $|N| = n - s_0$. Тогда существует $M \subset J$, $|M| = q - s_0$ такое, что $0 \in \mathrm{Intco}\{z^0_{\alpha\beta}, \alpha \in N\}$ для любого $\beta \in M$.

Для всех $\beta \in M$ определим множества

$$J_\beta = \{\alpha \in N : \text{преследователь } P_\alpha \text{ ловит убегающего } E_\beta\}.$$

Без ограничения общности будем считать, что

$$M = \{1, 2, \ldots, q - s_0\} \text{ и } |J_1| \leqslant |J_2| \leqslant \ldots \leqslant |J_{q-s_0}|.$$

В силу теоремы 1.1 $J_\beta \neq \emptyset$ для всех $\beta \in M$. Возможны два случая.

1. $|\bigcup\limits_{\beta=1}^{n_1} J_\beta| \geqslant n_1$ для любого $n_1 = 1, 2, \ldots, q - s_0$. Тогда по теореме Холла для множеств J_β существует система различных представителей, то есть существуют попарно различные $\alpha_\beta \in N$, $\beta \in M$ такие, что $\alpha_\beta \in J_\beta$. Таким образом, доказано, что преследователь P_{α_β} ловит убегающего E_β, $\beta \in M$ и утверждение в этом случае справедливо.

2. Существует $n_1 \in \{1, 2, \ldots, q - k_0\}$, при котором $|\bigcup\limits_{\beta=1}^{n_1} J_\beta| < n_1$. Пусть n_1 — наименьшее из натуральных чисел, удовлетворяющих данному свойству. Отметим, что

$$n_1 > 1 \text{ и } |\bigcup_{\beta=1}^{n_2} J_\beta| \geqslant n_2 \ \text{ для всех } \ n_2 \in \{1, 2, \ldots, n_1 - 1\}.$$

При $n_2 = n_1 - 1$ имеем систему неравенств

$$|\bigcup_{\beta=1}^{n_1} J_\beta| < n_1, \ |\bigcup_{\beta=1}^{n_1-1} J_\beta| \geqslant n_1 - 1,$$

в силу которой, получаем $|\bigcup\limits_{\beta=1}^{n_1} J_\beta| = n_1 - 1$. Рассмотрим множество

$$N_1 = N \backslash \bigcup_{\beta=1}^{n_1} J_\beta$$

Множество N_1 не пусто, так как

$$|N| = n - s_0, \ |\bigcup_{\beta=1}^{n_1} J_\beta| = n_1 - 1, \ n_1 \in \{1, 2, \ldots, q - s_0\}, \ n \geqslant q.$$

По предположению для числа $s = s_0 + n_1 - 1$ существует множество $M_1 \subset J$, $|M_1| = q - (s_0 + n_1 - 1)$ такое, что преследователи $P_\alpha, \alpha \in N_1$ ловят убегающих $E_\beta, \beta \in M_1$, причем $\{1, 2, \ldots, n_1 - 1\} \cap M_1 = \emptyset$, ибо в противном случае существовал бы номер $\alpha \in N_1$ такой, что преследователь P_α ловит убегающего E_β, где $\beta \in \{1, 2, \ldots, n_1 - 1\}$, что противоречит построению множества N_1.

$|\bigcup\limits_{\beta=1}^{n_2} J_\beta| \geqslant n_2$ для всех $n_2 \in \{1, 2, \ldots, n_1 - 1\}$, применяя теорему Холла, получим, что для J_β существует система различных представителей, то есть существуют попарно различные $\alpha \in J_\beta$, где $\beta = 1, 2, \ldots, n_1 - 1$. Значит преследователи P_α, где $\alpha \in \bigcup\limits_{\beta=1}^{n_1-1} J_\beta$ ловят не менее $n_1 - 1$ убегающих. Таким образом, все преследователи ловят не менее

$$(q - (s_0 + n_1 - 1)) + (n_1 - 1) = q - s_0$$

убегающих.

Ограниченность времени преследования следует непосредственно из теоремы 1.1. Теорема доказана.

Пример 1.5 *Пусть* $k = 2,\ n = 4,\ m = q = 2,\ t_0 = 0,$ *матрица* $A(t)$ *имеет вид*

$$A(t) = \begin{pmatrix} \cos t \sin t, & -\cos t \\ 2\cos t - \cos^3 t, & -\cos t \sin t \end{pmatrix},$$

$$y_1^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, y_2^0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, x_1^0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$x_2^0 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}, x_3^0 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}, x_4^0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Тогда фундаментальная матрица $\Phi(t)$ имеет вид

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} 1 & -\sin t \\ \sin t & \cos^2 t \end{pmatrix}$$

Матрица $\Phi(t)$ является рекуррентной и выполнено условие 2 теоремы 1.3. Тогда в игре Γ_3 происходит поимка не менее q убегающих.

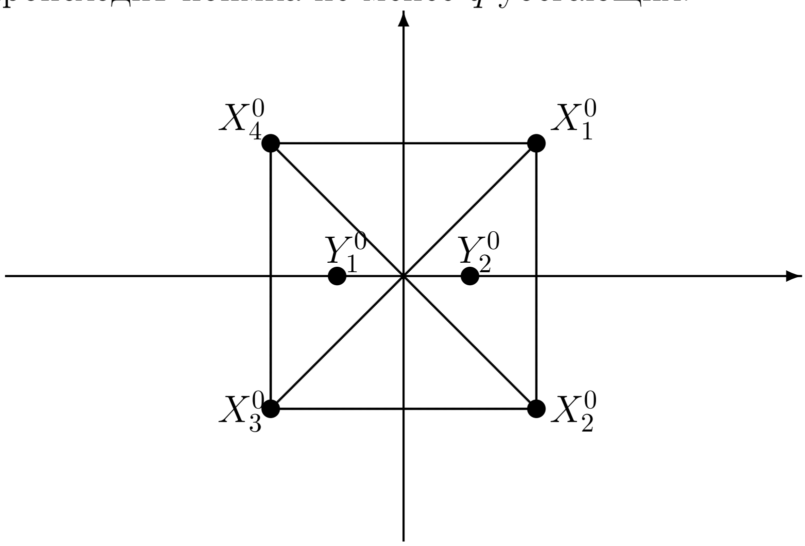

Рис. 5. Поимка двух убегающих.

Утверждение 1.3 ([63]) *Пусть* $A(t) \equiv 0$ *и выполнено условие* 2 *теоремы* 1.3. *Тогда в игре происходит поимка не менее* q *убегающих.*

Глава 2. Пример Л. С. Понтрягина со многими участниками

2.1. Поимка одного убегающего в рекуррентном примере Л. С. Понтрягина

В пространстве $\mathbb{R}^k$ $(k \geqslant 2)$ рассматривается дифференциальная игра $n+1$ лиц: n преследователей $P_1, \ldots, P_n$ и убегающего E.

Закон движения каждого из преследователей P_i имеет вид

$$x_i^{(l)} + a_1(t)x_i^{(l-1)} + \cdots + a_l(t)x_i = u_i,\ u_i \in V. \tag{2.1}$$

Закон движения убегающего E имеет вид

$$y^{(l)} + a_1(t)y^{(l-1)} + \cdots + a_l(t)y = v,\ v \in V. \tag{2.2}$$

Здесь и далее $x_i, y, u_i, v \in \mathbb{R}^k$, $a_1(t), \ldots, a_l(t)$ — непрерывные на $[t_0, \infty)$ функции, V — строго выпуклый компакт в $\mathbb{R}^k$ с гладкой границей.

При $t = t_0$ заданы начальные условия

$$x_i^{(q)}(t_0) = x_i^q, \quad y^{(q)}(t_0) = y^q, \quad \text{причем} \quad x_i^0 \neq y^0 \quad \text{для всех} \quad i. \tag{2.3}$$

Здесь и далее $i \in I = \{1, 2, \ldots, n\}$, $q = 0, 1, \ldots, l-1$.

Обозначим данную игру через Γ_4.

Вместо систем (2.1)–(2.3) рассмотрим систему

$$z_i^{(l)} + a_1(t)z_i^{(l-1)} + \cdots + a_l(t)z_i = u_i - v,\ u_i, v \in V. \tag{2.4}$$

$$z_i^{(q)}(t_0) = z_i^q = x_i^q - y^q,\ q = 0, 1, \ldots, l-1. \tag{2.5}$$

Назовем предысторией управления $v(t)$ убегающего E в момент времени

$t,\ t \in [t_0, \infty)$ множество

$$v_t(\cdot) = \{v(s), s \in [t_0, t], v - \text{измеримая функция.}\}$$

Определение 2.1 *Будем говорить, что задана квазистратегия $\mathcal{U}_i$ преследователя P_i, если определено отображение $\mathcal{U}_i(t, z^0, v_t(\cdot))$, ставящее в соответствие начальному состоянию $z^0 = (z_1^0, \ldots, z_n^0)$, моменту t и произвольной предыстории управления $v_t(\cdot)$ убегающего E измеримую функцию $u_i(t) = \mathcal{U}_i(t, z^0, v_t(\cdot))$ со значениями в V.*

Обозначим данную игру через Γ_4.

Определение 2.2 *В игре Γ_4 происходит поимка, если существует момент $T_0 = T(z^0)$ и квазистратегии $\mathcal{U}_1(t, z^0, v_t(\cdot)), \ldots, \mathcal{U}_n(t, z^0, v_t(\cdot))$ преследователей $P_1, \ldots, P_n$ такие, что для любой измеримой функции $v(\cdot)$, $v(t) \in V$, $t \in [t_0, T(z^0)]$ найдутся номер $\alpha \in \{1, \ldots, n\}$ и момент $\tau \in [t_0, T(z^0)]$ такие, что $z_\alpha(\tau) = 0$.*

Обозначим через $\varphi_q(t, s),\ q = 0, \ldots, l-1,\ (t \geqslant s \geqslant t_0)$ решения уравнения

$$\omega^{(l)} + a_1(t)\omega^{(l-1)} + \cdots + a_l(t)\omega = 0$$

с начальными условиями

$$\omega^{(j)}(s) = 0, \quad j = 0, \ldots, q-1, q+1 \ldots, l-1, \quad \omega^{(q)}(s) = 1.$$

Пусть далее

$$\xi_i(t) = \varphi_0(t, t_0)z_i^0 + \varphi_1(t, t_0)z_i^1 + \ldots + \varphi_{l-1}(t, t_0)z_i^{l-1}.$$

Обозначим $H_i = \{\xi_i(t),\ t \in [t_0, \infty)\}$.

Лемма 2.1 *Пусть для всех $i \in I = \{1, 2, \dots, n\}$ существуют $h_i^0 \in H_i$, $h_i^0 \neq 0$ такие, что $0 \in \operatorname{Intco}\{h_i^0\}$ и функции $\xi_i(t)$ являются рекуррентными. Тогда существуют $\varepsilon > 0$ и $T(\varepsilon) > 0$ такие, что справедливы следующие утверждения:*

1. $0 \notin D_\varepsilon(h_i^0)$ *и для любых* $h_i \in D_\varepsilon(h_i^0)$ *выполнено* $0 \in \operatorname{Intco}\{h_i\}$, *где* $D_\varepsilon(a) = \{z : \|z - a\| \leqslant \varepsilon\}$;

2. *Для каждого* $t \geqslant t_0$ *найдутся такие моменты* $\tau_i \in [t, t + T(\varepsilon)]$, *что*

$$||\xi_i(\tau_i) - h_i^0\| < \varepsilon.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Множество $\operatorname{co}\{h_i^0\}$ является выпуклым многогранником с вершинами в точках h_j^0, $j \in K \subset I$. Из условия леммы следует, что $0 \in \operatorname{Intco}\{h_j^0\}$. Множество $\operatorname{Intco}\{h_j^0\}$ открыто. Следовательно, существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любых $h_j \in D_\varepsilon(h_j^0)$ справедливо $0 \in \operatorname{Intco}\{h_j\}$. Так как $\operatorname{Intco}\{h_j\} \subset \operatorname{Intco}\{h_i\}$, то получаем утверждение 1 леммы.

Так как $\xi_i(t)$ являются рекуррентными , то для любого $\varepsilon > 0$ существует $T(\varepsilon) > 0$ такое, что для каждого $t \geqslant t_0$ найдутся такие моменты $\tau_i \in [t, t + T(\varepsilon)]$, что $||\xi_i(\tau_i) - h_i^0|| < \varepsilon$. Лемма доказана.

В дальнейшем считаем, что $\varepsilon > 0$ и T выбрано в соответствии с условиями леммы 2.1.

Определим функции:

$$\rho(t, s) = \begin{cases} 1, & \text{если } \varphi_{l-1}(t, s) \geqslant 0 \\ -1, & \text{иначе,} \end{cases}$$

$$\lambda(v, \rho, h_i) = \sup\{\lambda : \ \lambda \geqslant 0, \ v - \lambda \rho h_i \in V\},$$

$$G(t, h_i) = \int_{t_0}^{t} |\varphi_{l-1}(t, s)| \, \lambda(v(s), \rho(t, s), h_i) \, ds.$$

Полагаем далее

$$h = (h_1, h_2, \dots, h_n),\ D = D_\varepsilon(h_1^0) \times\ D_\varepsilon(h_2^0) \times \dots \times\ D_\varepsilon(h_n^0).$$

Лемма 2.2 *Пусть выполнены следующие условия:*

1. *Функции* $\xi_i(t)$ *рекуррентны на* $[t_0, \infty)$*;*

2. $\lim\limits_{t\to\infty} \int_{t_0}^t |\varphi_{l-1}(t,s)|\, ds = +\infty$*;*

3. *Для всех* $i \in I = \{1, 2, \dots, n\}$ *существуют* $h_i^0 \in H_i,\ h_i^0 \neq 0$ *такие, что* $0 \in \operatorname{Intco}\{h_i^0\}$.

Тогда существует момент T_1 *такой, что для любого допустимого управления* $v(t)$ *и для любого* $h \in D$ *существует* $\alpha \in I$ *такое, что* $G(T_1, h_\alpha) \geqslant 1$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условий леммы следует, что для любого $h \in D$ справедливо неравенство

$$\delta_{\pm 1}(h) = \min_{v\in V} \max_{i\in I} \lambda(v, \pm 1, h_i) > 0.$$

По лемме 1.3.13 [110] функция λ непрерывна на каждом из множеств $V\ \times\ \{\pm 1\} \times D_\varepsilon(h_i^0)$, поэтому

$$\lim_{h^*\to h} \delta_{\pm 1}(h^*) = \lim_{h^*\to h} \min_{v\in V} \max_{i\in I} \lambda(v, \pm 1, h_i^*) = \min_{v\in V} \max_{i\in I} \lambda(v, \pm 1, h_i) = \delta_{\pm 1}(h),$$

следовательно, и функции $\delta_{\pm 1}$ являются непрерывными на D. Учитывая, что множество D — компакт, получим

$$\delta = \min_{h\in D} \min_{\rho\in\{-1,1\}} \min_{v\in V} \max_{i\in I} \lambda(v, \rho, h_i) = \min_{h\in D} \{\delta_{+1}(h), \delta_{-1}(h)\} > 0.$$

Далее

$$\max_{i\in I} G(t, h_i) = \max_{i\in I} \int_{t_0}^t |\varphi_{l-1}(t,s)|\ \lambda(v(s), \rho(t,s), h_i)\, ds \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{n}\int_{t_0}^{t}|\varphi_{l-1}(t,s)|\ \sum_{i\in I}\lambda(v(s),\rho(t,s),h_i)\,ds \geqslant \frac{\delta}{n}\int_{t_0}^{t}|\varphi_{l-1}(t,s)|\,ds.$$

Таким образом, для момента T_1, определяемого из условия $\frac{\delta}{n}\int_{t_0}^{T_1}|\varphi_{l-1}(T_1,s)|\,ds \geqslant 1$ и некоторого $\alpha \in I$ выполнено неравенство $G(T_1,h_\alpha)\geqslant 1$. Лемма доказана.

Пусть

$$T(z^0)=\min\{t\geqslant 0\ :\ \inf_{v(\cdot)}\min_{h\in D}\ \max_{i\in I}\ G(t,h_i)\geqslant 1\}.$$

В силу леммы 2.2 выполнено неравенство $T(z^0)<\infty$.

Теорема 2.1 *Пусть выполнены следующие условия:*

1. *Функции* $\xi_i(t)$ *рекуррентны на* $[t_0,\infty)$*;*
2. *Существуют* $h_i^0\in H_i,\ h_i^0\neq 0$ *такие, что* $0\in \operatorname{Intco}\{h_1^0,h_2^0,\ldots,h_n^0\}$*;*
3. *Существуют моменты* $\tau_i\geqslant T(z^0)$ *такие, что*
   (*a*) $\xi_i(\tau_i)\in D_\varepsilon(h_i^0)$*;*
   (*b*) $\inf\limits_{v(\cdot)}\max\limits_{i} G(\tau_i,\xi_i(\tau_i))\geqslant 1.$

Тогда в игре Γ_4 *происходит поимка.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По формуле Коши решение задачи (2.4)–(2.5) при любых допустимых управлениях имеет вид

$$z_i(t)=\xi_i(t)+\int_{t_0}^{t}\varphi_{l-1}(t,s)(u_i(s)-v(s))\,ds.$$

Пусть τ_i — моменты, удовлетворяющие условию теоремы, $v(s),\ s\in[t_0,T_0]$ — произвольное допустимое управление убегающего E, где $T_0=\max\limits_i \tau_i$.

Рассмотрим функцию

$$f(t)=1-\max_{i\in I}\int_{t_0}^{t}|\varphi_{l-1}(\tau_i,s)|\ \lambda(v(s),\rho(\tau_i,s),\xi_i(\tau_i))\,ds.$$

Обозначим через $t_1\geqslant t_0$ наименьший корень данной функции. Отметим, что момент t_1 существует, в силу условия 3 теоремы, и $t_1\leqslant \tau_i$ по крайней мере для одного i.

Кроме того, существует номер $l \in I$ такой, что

$$1 - \int_{t_0}^{t_1} |\varphi_{l-1}(\tau_l, s)| \ \lambda(v(s), \rho(\tau_l, s), \xi_l(\tau_l)) \, ds = 0.$$

Задаем управление преследователей P_i следующим образом:

$$u_i(t) = v(t) - \lambda(v(t), \rho(\tau_i, t), \xi_i(\tau_i)) \ \rho(\tau_i, t) \ \xi_i(\tau_i) \ \text{ для всех } t \in [t_0, t_1].$$

где считаем, что $\lambda(v(t), \rho(\tau_i, t), \xi_i(\tau_i)) = 0$ при $t \in [t_1, T_0]$.

Тогда, с учетом формулы Коши, имеем

$$z_i(\tau_i) = \xi_i(\tau_i) \left(1 - \int_{t_0}^{t_1} |\varphi_{l-1}(\tau_i, s)| \ \lambda(v(s), \rho(\tau_i, s), \xi_i(\tau_i)) \, ds \right).$$

В силу определения t_1, для номера $l \in I$ выражение в скобках обращается в ноль, поэтому $z_l(\tau_l) = 0$. Теорема доказана.

Следствие 2.1 *Пусть выполнены следующие условия:*

1. *Функции $\xi_i(t)$ рекуррентны на $[t_0, \infty)$;*
2. $0 \in \operatorname{Intco} \{z_1^0, \ldots, z_n^0\}$. *Тогда в игре Γ_4 происходит поимка.*

Справедливость данного утверждения следует из леммы 2.2 и теоремы 2.1.

2.2. Групповое преследование с фазовыми ограничениями в рекуррентном примере Л. С. Понтрягина

В пространстве $\mathbb{R}^k$ $(k \geqslant 2)$ рассматривается дифференциальная игра $n + 1$ лиц: n преследователей $P_1, P_2, \ldots, P_n$ и убегающий E. Движение каждого преследователя P_i описывается уравнением

$$x_i^{(l)} + a_1(t) x_i^{(l-1)} + a_2(t) x_i^{(l-2)} + \ldots + a_l(t) x_i = u_i, \quad u_i \in V, \tag{2.6}$$

закон движения убегающего E имеет вид

$$y^{(l)} + a_1(t)y^{(l-1)} + a_2 y^{(l-2)} + \ldots + a_l(t)y = v, \quad v \in V, \tag{2.7}$$

где $x_i, y_j, u_i, v_j \in \mathbb{R}^k$, функции $a_1(t), a_2(t), \ldots, a_l(t)$ непрерывны на промежутке $[t_0, \infty)$, V — строго выпуклый компакт в $\mathbb{R}^k$ с гладкой границей.

В момент $t = t_0$ заданы начальные условия

$$x_i^{(q)}(t_0) = x_i^q, \quad y^{(q)}(t_0) = y^q, \quad \text{причем} \quad x_i^0 - y^0 \notin M_i \quad \text{для всех} \quad i, \tag{2.8}$$

где M_i — заданные выпуклые компакты. Здесь и далее $i \in I = \{1, 2, \ldots, n\}$, $q = 0, 1, \ldots, l-1$.

Дополнительно предполагается, что убегающий не покидает пределы выпуклого множества

$$B = \{y : y \in \mathbb{R}^k, (p_c, y) \leqslant \mu_c, c = 1, 2, \ldots, r\},$$

с непустой внутренностью, где (a, b) — скалярное произведение векторов a и b, $p_1, \ldots, p_r$ — единичные векторы $\mathbb{R}^k$, $\mu_1, \ldots, \mu_r$ — вещественные числа.

Обозначим данную игру через $\Gamma(n, B)$.

Вместо (2.6)–(2.8) рассмотрим уравнение

$$z_i^{(l)} + a_1(t)z_i^{(l-1)} + a_2(t)z_i^{(l-2)} + \ldots + a_l(t)z_i = u_i - v, \tag{2.9}$$

с начальными условиями

$$z_i^{(q)}(t_0) = z_i^q = x_i^q - y^q. \tag{2.10}$$

Через $\varphi_q(t, s)$ $(t \geqslant s \geqslant t_0)$ обозначим решение уравнения

$$\omega^{(l)} + a_1(t)\omega^{(l-1)} + a_2(t)\omega^{(l-2)} + \ldots + a_l(t)\omega = 0,$$

с начальными условиями

$$\omega(s) = 0, \ldots,\ \omega^{(q-1)}(s) = 0,\ \omega^{(q)}(s) = 1,\ \omega^{(q+1)}(s) = 0, \ldots,\ \omega^{(l-1)}(s) = 0.$$

Пусть далее

$$\xi_i(t) = \varphi_0(t, t_0)z_i^0 + \varphi_1(t, t_0)z_i^1 + \ldots + \varphi_{l-1}(t, t_0)z_i^{l-1},$$

$$\eta(t) = \varphi_0(t, t_0)y^0 + \varphi_1(t, t_0)y^1 + \ldots + \varphi_{l-1}(t, t_0)y^{l-1}.$$

Считаем, что $\xi_i(t) \notin M_i$ для всех $i,\ t \geqslant t_0$, ибо если $\xi_i(\tau) \in M_i$ при некоторых $i,\ \tau$, то преследователь P_i ловит убегающего E, полагая $u_i(t) = v(t)$.

Назовем предысторией управления $v(t)$ убегающего E в момент времени $t,\ t \in [t_0, \infty)$ множество

$$v_t(\cdot) = \{v(s), s \in [t_0, t], v - \text{измеримая функция.}\}$$

Определение 2.3 *Будем говорить, что задана квазистратегия $\mathcal{U}_i$ преследователя P_i, если определено отображение $\mathcal{U}_i(t, z^0, v_t(\cdot))$, ставящее в соответствие начальному состоянию $z^0 = (z_1^0, \ldots, z_n^0)$, моменту t и произвольной предыстории управления $v_t(\cdot)$ убегающего E измеримую функцию $u_i(t) = \mathcal{U}_i(t, z^0, v_t(\cdot))$ со значениями в V.*

Определение 2.4 *В игре $\Gamma(n, B)$ происходит поимка, если существует момент $T(z^0)$, квазистратегии $U_1(t, z^0, v_t(\cdot)), \ldots, U_n(t, z^0, v_t(\cdot))$ преследователей $P_1, \ldots, P_n$ такие, что для любой измеримой функции $v(\cdot)$, $v(t) \in V$, $y(t) \in B$, $t \in [t_0, T(z^0)]$ существуют момент $\tau \in [t_0, T(z^0)]$ и номер $\alpha \in I$, что $z_\alpha(\tau) \in M_\alpha$.*

Пусть

$$\rho(t,s)=\begin{cases}1, \text{ если } \varphi_{l-1}(t,s)\geqslant 0,\\ -1, \text{ если } \varphi_{l-1}(t,s)<0\end{cases}\qquad (t_0\leqslant s\leqslant t),$$

$$\lambda(v,\mu,b_i)=\sup\{\lambda\mid -\lambda\mu(b_i-M_i)\cap(V-v)\neq\emptyset\},$$

$$G(t,v(\cdot),b_i)=\int\limits_{t_0}^{t}|\varphi_{l-1}(t,s)|\lambda(v(s),\rho(t,s),b_i))ds,$$

$$F(t)=\int\limits_{t_0}^{t}|\varphi_{l-1}(t,s)|ds.$$

Предположение 2.1 1. *Функции $\xi_i(t)$ являются рекуррентными на $[t_0,\infty)$;*

2. *Функция $\eta(t)$ ограничена на $[t_0,\infty)$;*

3. $\lim\limits_{t\to\infty}F(t)=\infty$;

Предположение 2.2 *Существуют моменты $\tau_i^0\geqslant t_0$, положительные числа ε,δ такие, что*

1. *Для всех i и для всех $h_i\in D_\varepsilon(\xi_i(\tau_i^0))$ выполнено $h_i\notin M_i$;*

2. *Для всех $h_i\in D_\varepsilon(\xi_i(\tau_i^0))$ справедливы неравенства*

$$\min_v\max\Bigl\{\max_i\lambda(v,+1,h_i),\max_j(p_j,v)\Bigr\}\geqslant\delta,$$

$$\min_v\max\Bigl\{\max_i\lambda(v,-1,h_i),\max_j(-p_j,v)\Bigr\}\geqslant\delta.$$

Обозначим: $h=(h_1,h_2,\ldots,h_n)$, $\quad D=D_\varepsilon(\xi_1(\tau_1^0))\times D_\varepsilon(\xi_2(\tau_2^0))\times\ldots\times D_\varepsilon(\xi_n(\tau_n^0))$.

Лемма 2.3 *Пусть выполнены предположения 2.1, 2.2, $r=1$. Тогда существует момент $T\geqslant t_0$ такой, что для любого допустимого управления $v(\cdot)$ убегающего E, любого $h\in D$ существует номер $m\in I$ для которого $G(T,v(\cdot),h_m)\geqslant 1$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как управление $v(t)$ убегающего E допустимо, то для всех $t \geqslant t_0$

$$(p_1, y(t)) \leqslant \mu(t) = \mu_1 - (p_1, \eta(t)).$$

Определим множества

$$T^+(t) = \{\tau : \tau \in [t_0, t], \varphi_{l-1}(t, \tau) \geqslant 0\},\ T^-(t) = \{\tau : \tau \in [t_0, t], \varphi_{l-1}(t, \tau) < 0\},$$
$$T_1^+(t) = \{\tau : \tau \in T^+(t), (p_1, v(\tau)) \geqslant \delta\},$$
$$T_2^+(t) = \{\tau : \tau \in T^+(t), (p_1, v(\tau)) < \delta\},$$
$$T_1^-(t) = \{\tau : \tau \in T^-(t), (-p_1, v(\tau)) \geqslant \delta\},$$
$$T_2^-(t) = \{\tau : \tau \in T^-(t), (-p_1, v(\tau)) < \delta\}.$$

Тогда

$$\int\limits_{t_0}^{t} \varphi_{l-1}(t, s)(p_1, v(s))\, ds = \int\limits_{T^+(t)} \varphi_{l-1}(t, s)(p_1, v(s))\, ds +$$
$$+ \int\limits_{T^-(t)} (-\varphi_{l-1}(t, s))(-p_1, v(s))\, ds = \int\limits_{T_1^+(t)} \varphi_{l-1}(t, s)(p_1, v(s))\, ds +$$
$$+ \int\limits_{T_2^+(t)} \varphi_{l-1}(t, s)(p_1, v(s))\, ds + \int\limits_{T_1^-(t)} (-\varphi_{l-1}(t, s))(-p_1, v(s))\, ds +$$
$$+ \int\limits_{T_2^-(t)} (-\varphi_{l-1}(t, s))(-p_1, v(s))\, ds \geqslant \delta \int\limits_{T_1^+(t)} \varphi_{l-1}(t, s)\, ds - \int\limits_{T_2^+(t)} \varphi_{l-1}(t, s)\, ds +$$
$$+\delta \int\limits_{T_1^-(t)} (-\varphi_{l-1}(t, s))\, ds - \int\limits_{T_2^-(t)} (-\varphi_{l-1}(t, s))\, ds =$$
$$= \delta \int\limits_{T_1^+(t) \cup T_1^-(t)} |\varphi_{l-1}(t, s)|\, ds - \int\limits_{T_2^+(t) \cup T_2^-(t)} |\varphi_{l-1}(t, s)|\, ds.$$

Получаем

$$\delta \int\limits_{T_1^+(t)\cup T_1^-(t)} |\varphi_{l-1}(t,s)|\,ds - \int\limits_{T_2^+(t)\cup T_2^-(t)} |\varphi_{l-1}(t,s)|\,ds \leqslant \mu(t),$$

$$\int\limits_{T_1^+(t)\cup T_1^-(t)} |\varphi_{l-1}(t,s)|\,ds + \int\limits_{T_2^+(t)\cup T_2^-(t)} |\varphi_{l-1}(t,s)|\,ds = F(t).$$

Из последних двух соотношений следует,что

$$\int\limits_{T_2^+(t)\cup T_2^-(t)} |\varphi_{l-1}(t,s)|\,ds \geqslant \frac{\delta F(t)-\mu(t)}{1+\delta}.$$

Далее имеем

$$\max_{i\in I} G(t,v(\cdot),h_i) = \max_{i\in I}\int\limits_{t_0}^{t} |\varphi_{l-1}(t,s)|\lambda(v(s),\rho(t,s),h_i)\,ds \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{n}\int\limits_{t_0}^{t} |\varphi_{l-1}(t,s)|\sum_{i\in I}\lambda(v(s),\rho(t,s),h_i)\,ds \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\delta}{n}\int\limits_{T_2^+(t)\cup T_2^-(t)} |\varphi_{l-1}(t,s)|\,ds \geqslant \frac{\delta}{n}\Big(\frac{\delta F(t)-\mu(t)}{1+\delta}\Big).$$

Так как $F(t)\to\infty$ при $t\to\infty$, а $\mu(t)$ ограничена, то получаем требуемое утверждение. Лемма доказана.

Определим число T_0 :

$$T_0 = \min\{t \geqslant t_0 :\ \inf_{v(\cdot)}\min_{h\in D}\max_{i\in I} G(t,v(\cdot),h_i) \geqslant 1\}. \tag{2.11}$$

Предположение 2.3 *Существуют моменты $\tau_i \geqslant T_0$ такие, что*

1. $\xi_i(\tau_i)\in D_\varepsilon(\xi_i(\tau_i^0))$ *для всех* i;
2. $\inf\limits_{v(\cdot)}\max\limits_{i} G(\tau_i,v(\cdot),\xi_i(\tau_i)) \geqslant 1.$

Замечание 2.1 (a) *существование τ_i в пункте 1) предположения* 2.3 *гарантированно предположением о рекуррентности функций $\xi_i(t)$;*

(b) если в предположении 2.3 *все $\tau_i = \tau$, то пункт 2) данного предположения выполнен автоматически в силу леммы* 2.3.

Теорема 2.2 *Пусть выполнены предположения* 2.1, 2.2, 2.3, *$r = 1$. Тогда в игре $\Gamma(n, B)$ происходит поимка.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По формуле Коши для всех $t \geqslant t_0$ решение задачи (2.9)–(2.10) при любых допустимых управлениях имеет вид

$$z_i(t) = \xi_i(t) + \int\limits_{t_0}^{t} \varphi_{l-1}(t, s)(u_i(s) - v(s))\, ds.$$

Пусть τ_i — моменты времени, удовлетворяющие предположению 2.3, $v(s)$, $s \in [t_0, T_1]$ — произвольное допустимое управление убегающего E, где $T_1 = \max\limits_i \tau_i$. Рассмотрим функцию

$$H(t) = 1 - \max_i \int\limits_{t_0}^{t} |\varphi_{l-1}(\tau_i, s)|\; \lambda(v(s), \rho(\tau_i, s), \xi_i(\tau_i))ds.$$

Обозначим через $\tau_0 \geqslant t_0$ — первый корень данной функции. Отметим, что момент τ_0 существует в силу предположения 2.2, причем $\tau_0 \leqslant \tau_i$ хотя бы для одного i. Кроме того, существует номер m такой, что

$$1 - \int\limits_{t_0}^{\tau_0} |\varphi_{l-1}(\tau_m, s)| \lambda(v(s), \rho(\tau_m, s), \xi_m(\tau_m))ds = 0. \tag{2.12}$$

Для $j \neq m$ также обозначим через t_j — моменты времени для которых выполнено условие (2.12), если такие моменты существуют. В силу леммы Филиппова [105] для каждого i существуют измеримые функции $m_i(s)$, $u_i(s)$, $s \in [t_0, T_1]$

являющиеся при каждом фиксированном s решением уравнения

$$\lambda(v(s), \rho(\tau_j, s), \xi_i(\tau_j))(\xi_i(\tau_i) - m_i) = u_i - v(s).$$

Зададим управление преследователей P_i, полагая

$$u_i(t) = v(t) - \lambda(v(t), \rho(\tau_i, t), \xi_i(\tau_i))(\xi_i(\tau_i) - m_i(t)),\ t \in [t_0, \min\{t_i, T_1\}],$$
$$u_i(t) = v(t),\ t \in (\min\{t_i, T_1\}, T_1].$$

Тогда

$$z_i(\tau_i) = \xi_i(\tau_i) + \int\limits_{t_0}^{\tau_i} \varphi(\tau_i, s)(u_i(s) - v(s))ds =$$
$$= \xi_i(\tau_i) - \int\limits_{t_0}^{\tau_i} |\varphi_{l-1}(\tau_i, s)| \lambda(v(s), \rho(\tau_i, s), \xi_i(\tau_i))(\xi_i(\tau_i) - m_i(s))ds =$$
$$= \xi_i(\tau_i)(1 - \int\limits_{t_0}^{t_i} |\varphi_{l-1}(\tau_i, s)| \lambda(v(s), \rho(\tau_i, s), \xi_i(\tau_i))ds) +$$
$$+ \int\limits_{t_0}^{t_i} |\varphi_{l-1}(\tau_i, s)| \lambda(v(s), \rho(\tau_i, s), \xi_i(\tau_i)) m_i(s)ds.$$

Из (2.12) следует, что

$$z_m(\tau_m) = \int\limits_{t_0}^{t_m} |\varphi_{l-1}(\tau_m, s)| \lambda(v(s), \rho(\tau_m, s), \xi_m(\tau_m)) m_m(s)ds \in M_m$$

Теорема доказана.

Обозначим

$$\lambda(M_i, v) = \sup\big\{\lambda \geqslant 0,\ \lambda M_i \cap (V - v) \neq \emptyset\big\}.$$

Лемма 2.4 *Пусть* $V = D_1(0)$, $\;Q_i, i \in I$ *— выпуклые компакты* $\mathbb{R}^k$, $0 \notin Q_i$ *для всех* i. *Тогда*

$$\delta^+ = \min_v \max\Big\{\max_i, \lambda(Q_i, v), \max_j (p_j, v)\Big\} > 0$$

тогда и только тогда, когда

$$0 \in \operatorname{Intco}\{Q_1, \ldots, Q_n, p_1, \ldots, p_r\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отметим, что ([110, с. 46])

$$\lambda(Q_i, v) = \max_{q_i \in Q_i} \frac{(q_i, v) + \sqrt{(q_i, v)^2 + \|q_i\|^2 (1 - \|v\|^2)}}{\|q_i\|^2}.$$

Предположим, что $\delta^+ = 0$. Тогда существует $v_0, \|v_0\| = 1$ такой, что

$$\lambda(Q_i, v_0) = 0 \text{ для всех } i, \; (p_j, v_0) \leqslant 0 \text{ для всех } j.$$

Следовательно, справедливы следующие неравенства

$$(q_i, v_0) \leqslant 0 \text{ для всех } i, q_i \in Q_i, \; (p_j, v_0) \leqslant 0 \text{ для всех } j. \tag{2.13}$$

Поэтому 0 и $\operatorname{co}\{Q_1, \ldots, Q_n, p_1, \ldots, p_r\}$ отделимы. Значит $0 \notin \operatorname{Intco}\{Q_1, \ldots, Q_n, p_1, \ldots, p_r\}$.

Предположим теперь, что $0 \notin \operatorname{Intco}\{Q_1, \ldots, Q_n, p_1, \ldots, p_r\}$. Тогда 0 и $\operatorname{co}\{Q_1, \ldots, Q_n, p_1, \ldots, p_r\}$ отделимы. Следовательно, существует v_0, $\|v_0\| = 1$ такой, что справедливы неравенства (2.13). Значит $\lambda(Q_i, v_0) = 0$ для всех i. Поэтому $\delta^+ = 0$. Лемма доказана.

Следствие 2.2 *Пусть* $V = D_1(0)$, $Q_i, i \in I$ *— выпуклые компакты* $\mathbb{R}^k$, $0 \notin Q_i$ *для всех* i. *Тогда*

$$\delta^- = \min_v \max\Big\{\max_i, \lambda(-Q_i, v), \max_j(-p_j, v)\Big\} > 0$$

тогда и только тогда, когда

$$0 \in \operatorname{Intco}\{Q_1, \dots, Q_n, p_1, \dots, p_r\}.$$

Предположение 2.4 *Существуют* $\tau_i^0 \geqslant t_0$ *такие, что*

$$0 \in \operatorname{Intco}\Big\{\xi_i(\tau_i^0) - M_i, i \in I, p_1, \dots, p_r\Big\}$$

Лемма 2.5 *Пусть выполнены предположения* 2.1, 2.4. *Тогда существуют положительные числа* $\varepsilon, T(\varepsilon)$ *для которых справедливы следующие утверждения:*

1. *Для всех* $h_i \in D_\varepsilon(\xi_i(\tau_i^0))$ *имеют место следующие включения*

$$h_i \notin M_i,\ 0 \in \operatorname{Intco}\Big\{h_i - M_i, i \in I, p_1, \dots, p_r\Big\};$$

2. *Для каждого* $t \geqslant t_0$ *найдутся моменты* $\tau_i \in [t, t + T(\varepsilon)]$ *такие, что* $\xi_i(\tau_i) \in D_\varepsilon(\xi_i(\tau_i^0))$.

Справедливость первого утверждения следует из свойства строгой отделимости выпуклых множеств, а справедливость второго утверждения следует из свойства рекуррентных функций.

Выберем и зафиксируем $\varepsilon > 0$ и $T(\varepsilon) > 0$ так, чтобы имели место утверждения леммы 2.5.

Лемма 2.6 *Пусть $V = D_1(0)$ и выполнено предположение 2.4. Тогда для любого $h \in D$ справедливы неравенства*

$$\delta^+(h) = \min_v \max\{\max_i \lambda(h_i, 1, v), \max_j (p_j, v)\} > 0,$$

$$\delta^-(h) = \min_v \max\{\max_i \lambda(h_i, -1, v), \max_j (-p_j, v)\} > 0,$$

$$\delta = \min_{h \in S} \min\{\delta^+(h), \delta^-(h)\} > 0.$$

Доказательство. Пусть $h \in D$. Тогда для множеств $Q_i = h_i - M_i$ выполнены условия лемм 2.4 и 2.5. Поэтому $\delta^+(h) > 0$. В силу леммы 1.3.13 [110] функция $\delta^+(h)$ непрерывна на D. Поэтому по теореме Вейерштрасса $\min\limits_{h \in S} \delta^+(h) > 0$. Аналогично $\min\limits_{h \in S} \delta^-(h) > 0$. Следовательно, $\delta > 0$. Лемма доказана.

Теорема 2.3 ([57]) *Векторы $a_1, \ldots, a_s$ образуют положительный базис $\mathbb{R}^k$ тогда и только тогда, когда $0 \in \operatorname{Intco}\{a_1, \ldots, a_s\}$.*

Лемма 2.7 *Пусть $Q_i, i \in I$ — выпуклые компакты $\mathbb{R}^k$, $0 \notin Q_i$ для всех i и выполнены следующие условия:*

1. $0 \in \operatorname{Intco}\{Q_1, \ldots, Q_n, p_1, \ldots p_r\}$;
2. *Количество элементов множества* $\bigcup\limits_{i=1}^{n} Q_i$ *не менее* k;
3. *В множестве* $\bigcup\limits_{i=1}^{n} Q_i$ *существует* k *линейно независимых векторов.*

Тогда существуют $p \in \mathbb{R}^k, \mu \in \mathbb{R}^1$ такие, что

1. $B \subset B_1 = \{z \mid z \in \mathbb{R}^k, (p, z) \leqslant \mu\}$;
2. $0 \in \operatorname{Intco}\{Q_1, \ldots, Q_n, p\}$.

Доказательство. Из условия леммы следует, что существуют $q_1, \ldots, q_s \in \bigcup\limits_{i=1}^{n} Q_i$ такие, что

$$0 \in \operatorname{Intco}\{q_1, \ldots, q_s, p_1, \ldots, p_r\}.$$

Можно считать, что $s \geqslant k$ и векторы $q_1, \ldots, q_k$ линейно независимы. В силу теоремы 2.3 векторы $q_1, \ldots, q_s, p_1, \ldots, p_r$ образуют положительный базис. Поэтому существуют положительные числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$, $\beta_1, \ldots, \beta_r$ такие, что

$$0 = \alpha_1 q_1 + \cdots + \alpha_s q_s + \beta_1 p_1 + \cdots + \beta_r p_r. \tag{2.14}$$

Рассмотрим вектор $p = \beta_1 p_1 + \cdots + \beta_r p_r$. Покажем, что набор $q_1, \ldots, q_s, p$ образует положительный базис.

Пусть $x \in \mathbb{R}^k$. Так как $q_1, \ldots q_k$ образуют базис пространства $\mathbb{R}^k$, то существуют числа $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ такие, что

$$x = \gamma_1 q_1 + \cdots + \gamma_k q_k.$$

В силу соотношения (2.14) получаем, что для любого $d \in \mathbb{R}^1$ справедливо равенство

$$x = \gamma_1 q_1 + \cdots + \gamma_k q_k + d\big(\alpha_1 q_1 + \cdots + \alpha_s q_s + \beta_1 p_1 + \cdots + \beta_r p_r\big).$$

Взяв $d > 0$ так, чтобы выполнялись неравенства $\gamma_c + d\alpha_c > 0$ для всех $c = 1, \ldots, k$, получим, что

$$x = \gamma_1^0 q_1 + \gamma_s^0 q_s + dp$$

и при этом все коэффициенты положительны. Следовательно, $q_1, \ldots, q_s, p$ образуют положительный базис. Значит $0 \in \operatorname{Intco}\{q_1, \ldots, q_s, p\}$ и поэтому $0 \in \operatorname{Intco}\{Q_1, \ldots, Q_s, p\}$.

Рассмотрим множество

$$B_1 = \{z \mid z \in \mathbb{R}^k, (p, z) \leqslant \mu\},$$

где $\mu = \beta_1\mu_1 + \dots + \beta_r\mu_r$. Тогда $B \subset B_1$. Отметим, что если $p = 0$, то $B_1 = \mathbb{R}^k$. Лемма доказана.

Предположение 2.5 *Для любого $h \in D$ в множестве $\bigcup\limits_{i=1}^{n}(h_i - M_i)$ существует k линейно независимых векторов.*

Следствие 2.3 *Пусть выполнены предположения 2.1, 2.4, 2.5. Тогда для любого $h \in D$ существуют вектор $p(h) \in \mathbb{R}^k$ и число $\mu(h) \in \mathbb{R}^1$ такие, что*

1. $0 \in \operatorname{Intco}\{h_i - M_i, i \in I, p(h)\}$;
2. $B \subset B_1 = \{z \mid z \in \mathbb{R}^k, (p(h), z) \leqslant \mu(h)\}$.

Лемма 2.8 *Пусть $V = D_1(0)$ и выполнены предположения 2.1, 2.4, 2.5. Тогда существует момент $T \geqslant t_0$ такой, что для любого допустимого управления $v(\cdot)$ убегающего E в игре $\Gamma(n, B_1)$, любого $h \in D$ существует номер $m \in I$ для которого*

$$G(T, v(\cdot), h_m) \geqslant 1,$$

где B_1 определено в следствии 2.3.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $h \in D$. В силу леммы 2.6 имеем $\delta > 0$. Поэтому выполнены условия предположения 2.2. Следовательно, применима лемма 2.3, откуда и следует требуемое утверждение. Лемма доказана.

Теорема 2.4 *Пусть выполнены предположения 2.1, 2.4, 2.5 и существуют $\tau_i \geqslant T_0$ такие, что*

1. $\xi_i(\tau_i) \in D_\varepsilon(\xi_i(\tau_i^0))$;
2. $\inf\limits_{v(\cdot)} \max\limits_i G(\tau_i, v(\cdot), \xi_i(\tau_i)) \geqslant 1$ *в игре* $\Gamma(n, B_1)$.

Тогда в игре $\Gamma(n, B_1)$ происходит поимка.

Справедливость данного утверждения следует из теоремы 2.2.

Следствие 2.4 *Пусть выполнены все условия теоремы 2.4. Тогда в игре $\Gamma(n, B)$ происходит поимка.*

Пример 2.1 *Пусть система* (2.9), (2.10) *имеет вид*

$$\dot{z}_i = u_i - v, \;\; z_i(0) = z_i^0.$$

Для данного примера выполнено предположение 2.1.

Утверждение 2.1 *Пусть* $V = D_1(0)$, *в множестве* $\bigcup\limits_{i=1}^{n}(z_i^0 - M_i)$ *существует* k *линейно независимых векторов и*

$$0 \in \operatorname{Intco}\{z_i^0 - M_i, i \in I, p_1, \ldots, p_r\}.$$

Тогда в игре $\Gamma(n, B)$ *происходит поимка.*

Утверждение 2.2 ([39]) *Пусть* $V = D_1(0)$, B *— многогранник,* $M_i = \{0\}$ *для всех* i, $n \geqslant k$. *Тогда в игре* $\Gamma(n, B)$ *происходит поимка.*

Пример 2.2 *Пусть* $V = D_1(0)$, *система* (2.9),(2.10) *имеет вид*

$$\ddot{z}_i + \frac{2}{3t}\dot{z}_i + \frac{1}{9t^{4/3}} z_i = u_i - v,$$

причем $t_0 = 8\pi^2$. *Тогда*

$$\varphi_0(t, s) = \cos(\sqrt[3]{t} - \sqrt[3]{s}), \;\; \varphi_1(t, s) = 3s^{2/3}\sin(\sqrt[3]{t} - \sqrt[3]{s}),$$
$$\xi_i(t) = z_i^0 \cos(\sqrt[3]{t}) + 12\pi^2 z_i^0 \sin(\sqrt[3]{t}).$$

Рекуррентность функции $\xi_i(t)$ следует из результатов работы [33].

Утверждение 2.3 *Пусть существует момент* $\tau \in [t_0, \infty)$ *такой, что в множестве* $\bigcup\limits_{i=1}^{n}(\xi_i(\tau) - M_i)$ *существует* k *линейно независимых векторов и*

$$0 \in \operatorname{Intco}\{\xi_i(\tau) - M_i, \;\; i \in I, p_1, \ldots, p_r\}.$$

Тогда в игре $\Gamma(n, B)$ *происходит поимка.*

Взяв в качестве $\tau_i^0 = t_0 = 8\pi^2$, справедливо

Утверждение 2.4 *Пусть начальные позиции z_i^0 таковы, что в множестве $\bigcup\limits_{i=1}^{n}(z_i^0 - M_i)$ существует k линейно независимых векторов и*

$$0 \in \operatorname{Intco}\{z_i^0 - M_i, i \in I, p_1, \ldots, p_r\}.$$

Тогда в игре $\Gamma(n, B)$ происходит поимка.

Отметим, что для данного примера не выполнены условия работы [6].

2.3. Многократная поимка в рекуррентном примере Л. С. Понтрягина с фазовыми ограничениями

В пространстве $\mathbb{R}^k$ $(k \geqslant 2)$ рассматривается дифференциальная игра $n+1$ лиц: n преследователей $P_1, P_2, \ldots, P_n$ и убегающий E.

Движение каждого преследователя P_i описывается уравнением

$$x_i^{(l)} + a_1(t)x_i^{(l-1)} + a_2(t)x_i^{(l-2)} + \ldots + a_l(t)x_i = u_i, \quad u_i \in V, \tag{2.15}$$

закон движения убегающего E имеет вид

$$y^{(l)} + a_1(t)y^{(l-1)} + a_2 y^{(l-2)} + \ldots + a_l(t)y = v, \quad v \in V, \tag{2.16}$$

где $x_i, y_j, u_i, v_j \in \mathbb{R}^k$, функции $a_1(t), a_2(t), \ldots, a_l(t)$ непрерывны на промежутке $[t_0, \infty)$, V — строго выпуклый компакт в $\mathbb{R}^k$ с гладкой границей.

В момент $t = t_0$ заданы начальные условия

$$x_i^{(q)}(t_0) = x_i^q, \quad y^{(q)}(t_0) = y^q, \quad \text{причем} \quad x_i^0 - y^0 \neq 0 \quad \text{для всех} \quad i. \tag{2.17}$$

Здесь и далее $i \in I = \{1, 2, \ldots, n\}$, $q = 0, 1, \ldots, l-1$.

Дополнительно предполагается, что убегающий не покидает пределы выпуклого множества

$$B = \{y : y \in \mathbb{R}^k, (p_c, y) \leqslant \mu_c, c = 1, 2, \ldots, r\},$$

с непустой внутренностью, где (a, b) — скалярное произведение векторов a и b, $p_1, \ldots, p_r$ — единичные векторы $\mathbb{R}^k$, $\mu_1, \ldots, \mu_r$ — вещественные числа.

Вместо (2.15)–(2.17) рассмотрим уравнение

$$z_i^{(l)} + a_1(t)z_i^{(l-1)} + a_2(t)z_i^{(l-2)} + \ldots + a_l(t)z_i = u_i - v, \tag{2.18}$$

с начальными условиями

$$z_i^{(q)}(t_0) = z_i^q = x_i^q - y^q. \tag{2.19}$$

Через $\varphi_q(t, s)$ $(t \geqslant s \geqslant t_0)$ обозначим решение уравнения

$$\omega^{(l)} + a_1(t)\omega^{(l-1)} + a_2(t)\omega^{(l-2)} + \ldots + a_l(t)\omega = 0,$$

с начальными условиями

$$\omega(s) = 0, \ldots,\ \omega^{(q-1)}(s) = 0,\ \omega^{(q)}(s) = 1,\ \omega^{(q+1)}(s) = 0, \ldots,\ \omega^{(l-1)}(s) = 0.$$

Пусть далее

$$\xi_i(t) = \varphi_0(t, t_0)z_i^0 + \varphi_1(t, t_0)z_i^1 + \ldots + \varphi_{l-1}(t, t_0)z_i^{l-1},$$

$$\eta(t) = \varphi_0(t, t_0)y^0 + \varphi_1(t, t_0)y^1 + \ldots + \varphi_{l-1}(t, t_0)y^{l-1}.$$

Считаем, что $\xi_i(t) \neq 0$ для всех $i, t \geqslant t_0$, ибо если $\xi_i(\tau) = 0$ при некоторых i, τ, то преследователь P_i ловит убегающего E, полагая $u_i(t) = v(t)$.

Определение 2.5 *Будем говорить, что задана квазистратегия $\mathcal{U}_i$ преследователя P_i, если определено отображение $\mathcal{U}_i(t, z^0, v_t(\cdot))$, ставящее в соответствие начальному состоянию $z^0 = (z_1^0, \ldots, z_n^0)$, моменту t и произвольной предыстории управления $v_t(\cdot)$ убегающего E измеримую функцию $u_i(t) = \mathcal{U}_i(t, z^0, v_t(\cdot))$ со значениями в V.*

Определение 2.6 *В игре $\Gamma(n, B)$ происходит m-кратная поимка (при $m = 1$ поимка), если существуют момент $T(z^0)$, квазистратегии $U_1(t, z^0, v_t(\cdot)), \ldots, U_n(t, z^0, v_t(\cdot))$ преследователей $P_1, \ldots, P_n$ такие, что для любой измеримой функции $v(\cdot), v(t) \in V$, $y(t) \in B$, $t \in [t_0, T(z^0)]$ существуют моменты $\tau_1, \ldots, \tau_m \in [t_0, T(z^0)]$, попарно различные индексы $i_1, \ldots, i_m \in I$, что $z_{i_s}(\tau_s) = 0, s = 1, \ldots, m$.*

$$\Omega(p) = \{(i_1, \ldots, i_p) | i_1, \ldots, i_p \in I \text{ и попарно различны}\},$$

$$\rho(t, s) = \begin{cases} 1, \text{ если } \varphi_{l-1}(t, s) \geqslant 0, \\ -1, \text{ если } \varphi_{l-1}(t, s) < 0 \end{cases} \quad (t_0 \leqslant s \leqslant t),$$

$$\lambda(v, \mu, b_i) = \sup\{\lambda \geqslant 0 \mid -\lambda\mu b_i \cap (V - v) \neq \emptyset\},$$

$$G(t, v(\cdot), b_i) = \int\limits_{t_0}^{t} |\varphi_{l-1}(t, s)| \lambda(v(s), \rho(t, s), b_i)) ds,$$

$$F(t) = \int\limits_{t_0}^{t} |\varphi_{l-1}(t, s)| ds.$$

Предположение 2.6 1. $n \geqslant m + k - 1$;

2. *Функции* $\xi_i(t)$ *являются рекуррентными на* $[t_0, \infty)$;
3. *Функция* $\eta(t)$ *ограничена на* $[t_0, \infty)$;
4. $\lim\limits_{t \to \infty} F(t) = \infty$;
5. $V = D_1(0)$, *где* $D_r(a) = \{z \in \mathbb{R}^k \mid \|z - a\| \leqslant r\}$.

Предположение 2.7 *Существуют моменты* $\tau_i^0 \in [t_0, \infty)$ *такие, что для всех* $\Lambda \in \Omega(n-m+1)$ *выполнено включение*

$$0 \in \operatorname{Intco}\{\xi_j(\tau_j^0), j \in \Lambda, p_1, \ldots, p_r\}.$$

Отметим, что предположение 2.6 будет, в частности, выполнено если функции $a_i(t)$ являются постоянными, а корни характеристического уравнения (2.18) являются простыми и чисто мнимыми.

Лемма 2.9 *Пусть выполнено предположение* 2.7. *Тогда существуют* $\varepsilon > 0$, $T(\varepsilon) > 0$ *для которых справедливы следующие утверждения:*

1. $0 \notin D_\varepsilon(\xi_i(\tau_i^0))$ *и каждый набор* $h = (h_1, \ldots, h_n)$, $h_i \in D_\varepsilon(\xi_i(\tau_i^0))$ *обладает свойством*

$$0 \in \operatorname{Intco}\{h_j, j \in \Lambda, p_1, \ldots, p_r\} \text{ для всех } \Lambda \in \Omega(n-m+1);$$

2. *Для каждого* $t \geqslant t_0$ *найдется момент* $\tau_i(t) \in [t, t+T(\varepsilon)]$ *такой, что* $\xi_i(\tau_i(t)) \in D_\varepsilon(\xi_i(\tau_i^0))$.

Справедливость первого утверждения следует из свойства открытых множеств, а справедливость второго утверждения - из свойства рекуррентных функций.

Выберем и зафиксируем $\varepsilon > 0$, $T(\varepsilon) > 0$ так, чтобы имели место утверждения леммы 2.9.

Обозначим через

$$D = D_\varepsilon(\xi_1(\tau_1^0)) \times D_\varepsilon(\xi_2(\tau_2^0)) \times \cdots \times D_\varepsilon(\xi_n(\tau_n^0)),$$
$$\delta = \min_{h \in D} \min_{r \in \{-1,1\}} \min_{v \in V} \max\{\max_{\Lambda \in \Omega(m)} \min_{j \in \Lambda} \lambda(v, r, h_j), \max_s (p_s, v)\}.$$

Лемма 2.10 *Пусть* $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}^k$, $b_j \neq 0$, $V = D_1(0)$. *Тогда*

$$0 \in \operatorname{Intco}\{b_1, \dots, b_n, p_1, \dots, p_r\} \tag{2.20}$$

тогда и только тогда когда

$$\delta_0 = \min_{v \in V} \max\{\max_j \lambda(v, 1, b_j), \max_s (p_s, v)\} > 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть выполнено условие (2.20). Предположим, что $\delta_0 = 0$. Тогда существует $v_0 \in V$ для которого $\lambda(v_0, 1, b_j) = 0$, $(p_s, v_0) \leqslant 0$ для всех j, s. Так как [110, с. 56]

$$\lambda(v, 1, b_j) = \frac{(b_j, v) + \sqrt{(b_j, v)^2 + \|b_j\|^2(1 - \|v\|^2)}}{\|b_j\|^2},$$

то получаем, что $\|v_0\| = 1$ и $(b_j, v_0) \leqslant 0$ для всех j. Следовательно, набор $\operatorname{co}\{b_1, \dots, b_n, p_1, \dots, p_r\}$ отделим от нуля. Получили противоречие.

Пусть $\delta_0 > 0$. Докажем (2.20). Предположим, что условие (2.20) не выполняется. Тогда множество $\operatorname{co}\{b_1, \dots, b_n, p_1, \dots, p_r\}$ отделимо от нуля. Поэтому существует $v_0 \in V$, $\|v_0\| = 1$ и такой, что $(b_j, v_0) \leqslant 0$, $(p_s, v_0) \leqslant 0$ для всех j, s. Отсюда $\delta_0 = 0$. Получили противоречие. Лемма доказана.

Лемма 2.11 *Пусть* $V = D_1(0)$ *и выполнено предположение* 2.7. *Тогда* $\delta > 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем $h \in D$. Пусть

$$\delta^+(h) = \min_{v \in V} \max_{\Lambda \in \Omega(m)} \min_{j \in \Lambda} \lambda(v, +1, h_j),$$

$$\delta^-(h) = \min_{v \in V} \max_{\Lambda \in \Omega(m)} \min_{j \in \Lambda} \lambda(v, -1, h_j).$$

Докажем, что $\delta^+(h) > 0$, $\delta^-(h) > 0$. Предположим, что $\delta^+(h) = 0$. Тогда существует $v \in V$, что для каждого $\Lambda \in \Omega(m)$ найдется номер $p \in \Lambda$ для которого $\lambda(v, +1, h_p) = 0$ и, кроме того, $\max_s (p_s, v) \leqslant 0$.

Построим множество $\Lambda_0 \in \Omega(n-m+1)$ по следующему правилу. Выберем $p_1 \in L_1 = \{1, 2, \ldots, m\} \in \Omega(m)$ и h_{p_1} из условия $\lambda(v, 1, h_{p_1}) = 0$. Далее выберем $p_2 \in L_2 = \big(L_1 \cup \{m+1\}\big) \backslash \{p_1\}$ и h_{p_2} такие, что $\lambda(v, 1, h_{p_2}) = 0$ и так далее. На последнем шаге построим множество $L_{n-m+1} = \big(L_{n-m} \cup \{n\}\big) \backslash \{p_{n-m}\}$ и выберем $p_{n-m+1} \in L_{n-m+1}$, $h_{p_{n-m+1}}$, для которых $\lambda(v, 1, h_{n-m+1}) = 0$. По построению множества Λ_0 имеем $\max\{\max\limits_{j \in \Lambda_0} \lambda(v, 1, h_j), \max\limits_{s}(p_s, v)\} = 0$. Поэтому из леммы 2.10 следует, что $0 \notin \operatorname{Intco}\{h_j, j \in \Lambda_0, p_1, \ldots p_r\}$, что противоречит предположению 2.7. Значит $\delta^+(h) > 0$ для всех $h \in D$. Аналогично доказывается, что $\delta^-(h) > 0$ для всех $h \in D$. Так как V строго выпуклый компакт с гладкой границей, то в силу леммы 1.3.13 ([110, с. 30]) функции $\lambda(v, \pm 1, h)$ непрерывны по (v, h). Осталось применить теорему Вейерштрасса. Лемма доказана.

Лемма 2.12 *Пусть выполнены предположения* 2.6, 2.7, $r = 1$. *Тогда существует момент $T > t_0$ такой, что для любого допустимого управления $v(\cdot)$ убегающего E, любого набора $h \in D$ найдется множество $\Lambda \in \Omega(m)$, что*

$$\min_{j \in \Lambda} G(T, v(\cdot), h_j) \geqslant 1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $h \in D$. Тогда, в силу леммы 2.11, $\delta > 0$. Так как управление $v(t)$ убегающего E допустимо, то для всех $t \geqslant t_0$

$$(p_1, y(t)) \leqslant \mu(t) = \mu_1 - (p_1, \eta(t)).$$

Определим множества

$$T^+(t) = \{\tau : \tau \in [t_0, t], \varphi_{l-1}(t, \tau) \geqslant 0\}, \; T^-(t) = \{\tau : \tau \in [t_0, t], \varphi_{l-1}(t, \tau) < 0\},$$

$$T_1^+(t) = \{\tau : \tau \in T^+(t), (p_1, v(\tau)) \geqslant \delta\},$$

$$T_2^+(t) = \{\tau : \tau \in T^+(t), (p_1, v(\tau)) < \delta\},$$

$$T_1^-(t) = \{\tau : \tau \in T^-(t), (-p_1, v(\tau)) \geqslant \delta\},$$

$$T_2^-(t) = \{\tau : \tau \in T^-(t), (-p_1, v(\tau)) < \delta\}.$$

Тогда

$$\int\limits_{t_0}^{t} \varphi_{l-1}(t,s)(p_1, v(s))\, ds = \int\limits_{T^+(t)} \varphi_{l-1}(t,s)(p_1, v(s))\, ds +$$
$$+ \int\limits_{T^-(t)} (-\varphi_{l-1}(t,s))(-p_1, v(s))\, ds = \int\limits_{T_1^+(t)} \varphi_{l-1}(t,s)(p_1, v(s))\, ds +$$
$$+ \int\limits_{T_2^+(t)} \varphi_{l-1}(t,s)(p_1, v(s))\, ds + \int\limits_{T_1^-(t)} (-\varphi_{l-1}(t,s))(-p_1, v(s))\, ds +$$
$$+ \int\limits_{T_2^-(t)} (-\varphi_{l-1}(t,s))(-p_1, v(s))\, ds \geqslant \delta \int\limits_{T_1^+(t)} \varphi_{l-1}(t,s)\, ds - \int\limits_{T_2^+(t)} \varphi_{l-1}(t,s)\, ds +$$
$$+\delta \int\limits_{T_1^-(t)} (-\varphi_{l-1}(t,s))\, ds - \int\limits_{T_2^-(t)} (-\varphi_{l-1}(t,s))\, ds =$$
$$= \delta \int\limits_{T_1^+(t) \cup T_1^-(t)} |\varphi_{l-1}(t,s)|\, ds - \int\limits_{T_2^+(t) \cup T_2^-(t)} |\varphi_{l-1}(t,s)|\, ds.$$

Получаем

$$\delta \int\limits_{T_1^+(t) \cup T_1^-(t)} |\varphi_{l-1}(t,s)|\, ds - \int\limits_{T_2^+(t) \cup T_2^-(t)} |\varphi_{l-1}(t,s)|\, ds \leqslant \mu(t),$$

$$\int\limits_{T_1^+(t) \cup T_1^-(t)} |\varphi_{l-1}(t,s)|\, ds + \int\limits_{T_2^+(t) \cup T_2^-(t)} |\varphi_{l-1}(t,s)|\, ds = F(t).$$

Из последних двух соотношений следует, что

$$\int\limits_{T_2^+(t) \cup T_2^-(t)} |\varphi_{l-1}(t,s)|\, ds \geqslant \frac{\delta F(t) - \mu(t)}{1 + \delta}.$$

Далее имеем

$$
\begin{aligned}
\max_{\Lambda\in\Omega(m)}\min_{j\in\Lambda} G(t,v(\cdot),h_j) = \max_{\Lambda\in\Omega(m)}\min_{j\in\Lambda}\int\limits_{t_0}^{t}|\varphi_{l-1}(t,s)|\lambda(v(s),\rho(t,s),h_j)\,ds \geqslant \\
\geqslant \max_{\Lambda\in\Omega(m)}\int\limits_{t_0}^{t}|\varphi_{l-1}(t,s)|\min_{j\in\Lambda}\lambda(v(s),\rho(t,s),h_j)ds \geqslant \\
\geqslant \frac{1}{C_n^m}\int\limits_{t_0}^{t}|\varphi_{l-1}(t,s)|\sum_{\Lambda\in\Omega(m)}\Big(\min_{j\in\Lambda}\lambda(v(s),\rho(t,s),h_j)\Big)ds \geqslant \\
\geqslant \frac{1}{C_n^m}\int\limits_{t_0}^{t}|\varphi_{l-1}(t,s)|\max_{\Lambda\in\Omega(m)}\min_{j\in\Lambda}\lambda(v(s),\rho(t,s),h_j)ds \geqslant \\
\geqslant \frac{1}{C_n^m}\int\limits_{T_1^+(t)\cup T_1^-(t)}|\varphi_{l-1}(t,s)|\max_{\Lambda\in\Omega(m)}\min_{j\in\Lambda}\lambda(v(s),\rho(t,s),h_j)ds \geqslant \\
\geqslant \frac{\delta}{C_n^m}\int\limits_{T_1^+(t)\cup T_1^-(t)}|\varphi_{l-1}(t,s)|ds \geqslant \frac{\delta}{C_n^m}\Big[\frac{\delta F(t)-\mu(t)}{1+\delta}\Big].
\end{aligned}
$$

Так как $F(t)\to\infty$, $\mu(t)$ ограничена, то существует T такой, что

$$
\frac{\delta}{C_n^m}\Big[\frac{\delta F(t)-\mu(t)}{1+\delta}\Big]\geqslant 1
$$

для всех $t\geqslant T$, откуда получаем требуемое утверждение. Лемма доказана.

Лемма 2.13 *Пусть* $b_1,\dots,b_n\in\mathbb{R}^k, n\geqslant k$, *выполнено включение* (2.20) *и* $b_1,\dots,b_k$ *линейно независимы. Тогда существуют* $p\in\mathbb{R}^k,\mu\in\mathbb{R}^1$, *что* $B\subset B_1=\{z\mid (p,z)\leqslant\mu\}$ *и* $0\in\operatorname{Intco}\{b_1,\dots,b_n,p\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из соотношения (2.20) [57] следует, что существуют $\alpha_i>0$, $\beta_j>0$ такие, что

$$
0=\alpha_1 b_1+\dots+\alpha_n b_n+\beta_1 p_1+\dots+\beta_r p_r.
$$

Пусть $x \in \mathbb{R}^k$. Тогда существуют $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ такие, что

$$x = \gamma_1 x_1 + \dots + \gamma_k x_k.$$

Поэтому при любом $d \in \mathbb{R}^1$ справедливо равенство

$$x = \gamma_1 x_1 + \dots + \gamma_k x_k + d(\alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n + \beta_1 p_1 + \dots + \beta_r p_r).$$

Полагаем $p = \beta_1 p_1 + \dots + \beta_r p_r$. Возьмем $d > 0$ таким, чтобы для всех i выполнялись неравенства $\gamma_i + d\alpha_i > 0$. Получаем $x = \gamma_1^0 b_1 + \dots + \gamma_n^0 b_n + dp$, причем $\gamma_i^0 > 0$. Следовательно [57], $0 \in \operatorname{Intco}\{b_1, \dots, b_n, p\}$. Рассмотрим множество $B_1 = \{z \mid (p, z) \leqslant \mu\}$, где $\mu = \beta_1 \mu_1 + \dots \beta_r \mu_r$. Тогда $B \subset B_1$. Лемма доказана.

Лемма 2.14 *Пусть* $V = D_1(0)$, $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}^k, n \geqslant m + k - 1$ *и выполнены следующие условия*

1. $0 \in \operatorname{Intco}\{b_j, j \in \Lambda, p_1, \dots, p_r\}$ *для любого* $\Lambda \in \Omega(n - m + 1)$;
2. $\min\limits_{v \in \overline{coV_1}} \max\limits_{s} (p_s, v) > 0$, *где* $V_1 = \{v \in V \mid \max\limits_{J \in \Omega(m)} \min\limits_{j \in J} \lambda(v, 1, b_j) = 0\}$.

Тогда существуют $p \in \mathbb{R}^k, \mu \in \mathbb{R}^1$ *такие, что*

1. $B \subset B_1 = \{z \in R^k \mid (p, z) \leqslant \mu\}$;
2. $0 \in \operatorname{Intco}\{b_j, j \in \Lambda, p\}$ *для всех* $\Lambda \in \Omega(n - m + 1)$.

Доказательство. По теореме Боннебласта, Карлина, Шепли [51] существуют $\gamma_s \geqslant 0$, $\gamma_1 + \dots + \gamma_s = 1$ такие, что $\inf\limits_{v \in \mathrm{co}V_1} \sum\limits_{s=1}^{r} \gamma_s (p_s, v) > 0$. Полагаем $p = \gamma_1 p_1 + \dots + \gamma_s p_s$, $\mu = \gamma_1 \mu_1 + \dots + \gamma_s \mu_s$. Считаем, что $p \neq 0$. Получаем $B \subset B_1 = \{z \mid (p, z) \leqslant \mu\}$, $(p, v) > 0$ для всех $v \in \mathrm{co}V_1$. Докажем второе утверждение леммы. Предположим, что существует номер $\Lambda_0 \in \Omega(n - m + 1)$ для которого $0 \notin \operatorname{Intco}\{b_j, j \in \Lambda_0, p\}$. Тогда, в силу леммы 2.10

$$\min_{v \in V} \max\{\max_{j \in \Lambda_0} \lambda(v, 1, b_j), (p, v)\} = 0.$$

Следовательно, существует $v_0 \in V$ для которого $\max\limits_{j \in \Lambda_0} \lambda(v_0, 1, b_j) = 0$, $(p, v_0) \leqslant 0$. Поэтому $\lambda(v_0, 1, b_j) = 0$ для всех $j \in \Lambda_0$. Отсюда для любого $J \in \Omega(m)$ будет выполняться $\min\limits_{j \in J} \lambda(v_0, 1, b_j) = 0$. Следовательно, $\max\limits_{J \in \Omega(m)} \min\limits_{j} \lambda(v_0, 1, b_j) = 0$. Получили, что $v_0 \in V_1$ и поэтому $(p, v_0) > 0$. Получили противоречие. Лемма доказана.

Определим число

$$T_0 = \min\{t \geqslant t_0 \mid \min_{v(\cdot)} \min_{h \in D} \max_{\Lambda \in \Omega(m)} \min_{j \in \Lambda} G(t, v(\cdot), h_j) \geqslant 1\}.$$

В силу леммы 2.12 $T_0 < +\infty$.

Предположение 2.8 *Существуют моменты* $\tau_i \geqslant T_0$ *такие, что*

1. $\xi_i(\tau_i) \in D_\varepsilon(\xi_i(\tau_i^0))$ *для всех* i;
2. $\inf\limits_{v(\cdot)} \max\limits_{\Lambda \in \Omega(m)} \min\limits_{j \in \Lambda} G(\tau_j, v(\cdot), \xi_j(\tau_j)) \geqslant 1$.

Замечание 2.2 (*a*) *существование* τ_i *в пункте 1 предположения* 2.8 *гарантировано предположением о рекуррентности функций* $\xi_i(t)$;

(*b*) *если в предположении* 2.8 *все* $\tau_i = \tau$, *то пункт 2 данного предположения выполнен автоматически в силу леммы* 2.9.

Теорема 2.5 *Пусть выполнены предположения* 2.6, 2.7, 2.8, $r = 1$. *Тогда в игре* $\Gamma(n, B)$ *происходит* m*-кратная поимка.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть τ_j — моменты, удовлетворяющие предположению 2.8, $v(s), s \in [t_0, T_1]$ — произвольное допустимое управление убегающего E, где $T_1 = \max\limits_i \tau_i$. Рассмотрим функцию

$$H(t) = 1 - \max_{\Lambda \in \Omega(m)} \min_{j \in \Lambda} \int_{t_0}^{t} |\varphi_{l-1}(\tau_j, s)| \lambda(v(s), r(\tau_j, s), \xi_j(\tau_j)) ds.$$

Обозначим через $\tau_0 \geqslant t_0$ — первый корень данной функции. Отметим, что момент τ_0 существует в силу предположения 2.8. Кроме того, существует множество $\Lambda_0 \in \Omega(m)$ такое, что $\tau_0 \leqslant \tau_j$ для всех $j \in \Lambda_0$ и

$$1 - \min_{j \in \Lambda} \int\limits_{t_0}^{\tau_0} |\varphi_{l-1}(\tau_j, s)| \lambda(v(s), r(\tau_j, s), \xi_j(\tau_j)) ds \leqslant 0.$$

для всех $j \in \Lambda_0$. Поэтому существуют моменты $t_j \leqslant \tau_0, j \in \Lambda_0$ для которых

$$1 - \int\limits_{t_0}^{t_j} |\varphi_{l-1}(\tau_j, s)| \lambda(v(s), r(\tau_j, s), \xi_j(\tau_j)) ds = 0. \tag{2.21}$$

Для $j \notin \Lambda_0$ также обозначим через t_j — моменты времени для которых выполнено условие (2.21), если такие моменты существуют. В силу леммы Филиппова [105] для каждого i существуют измеримые функции $u_i(s)$, $s \in [t_0, T_1]$, являющиеся при каждом фиксированном s решением уравнения

$$\lambda(v(s), r(\tau_i, s), \xi_i(\tau_i)) \xi_i(\tau_i) = u_i - v(s).$$

Задаем управления преследователей P_i, полагая

$$u_i(t) = v(t) - \lambda(v(t), r(\tau_i, t), \xi_i(\tau_i)) \cdot \xi_i(\tau_i), \ t \in [t_0, \min\{t_i, T_1\}],$$
$$u_i(t) = v(t), \ t \in (\min\{t_i, T_1\}, T_1].$$

Тогда

$$z_i(\tau_i) = \xi_i(\tau_i) + \int\limits_{t_0}^{\tau_i} \varphi(\tau_i, s)(u_i(s) - v(s)) ds =$$

$$= \xi_i(\tau_i) - \int\limits_{t_0}^{\tau_i} |\varphi_{l-1}(\tau_i, s)| \lambda(v(s), r(\tau_i, s), \xi_i(\tau_i)) \cdot \xi_i(\tau_i) ds =$$

$$= \xi_i(\tau_i)(1 - \int\limits_{t_0}^{t_i} |\varphi_{l-1}(\tau_i, s)|\lambda(v(s), r(\tau_i, s), \xi_i(\tau_i))ds.$$

Из (2.21) следует, что $z_j(\tau_j) = 0$ для всех $j \in \Lambda_0$. Теорема доказана.

Теорема 2.6 *Пусть* $m = 1$ *и выполнены предположения* 2.6, 2.7, 2.8. *Тогда в игре* $\Gamma(n, B)$ *происходит поимка.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из предположения 2.7 и леммы 2.13 следует, что существуют $p \in \mathbb{R}^k$, $\mu \in \mathbb{R}^1$ такие, что

$$0 \in \mathrm{Intco}\{\xi_i(\tau_i^0), i \in I, p\} \text{ и } B \subset B_1 = \{z \mid (p, z) \leqslant \mu\}.$$

Из теоремы 2.5 следует, что в игре $\Gamma(n, B_1)$ происходит поимка. Поэтому поимка происходит и в игре $\Gamma(n, B)$. Теорема доказана.

Предположение 2.9 *Существуют* $p \in \mathbb{R}^k$, $\mu \in \mathbb{R}^1$, *моменты* $\tau_i^0 \in [t_0, \infty)$ *такие, что*

1. $B \subset B_1 = \{z \mid (p, z) \leqslant \mu\}$;
2. *Для всех* $\Lambda \in \Omega(n - m + 1)$ *выполнено включение*

$$0 \in \mathrm{Intco}\{\xi_j(\tau_j^0), j \in \Lambda, p\}.$$

Замечание 2.3 *Если выполнены предположение* 2.7 *и условия леммы* 2.14, *то предположение* 2.9 *выполнено.*

Теорема 2.7 *Пусть выполнены предположения* 2.6, 2.8, 2.9. *Тогда в игре* $\Gamma(n, B)$ *происходит* m*-кратная поимка.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условия теоремы и теоремы 2.5 следует, что m-кратная поимка происходит в игре $\Gamma(n, B_1)$. Следовательно, поимка произойдет и в игре $\Gamma(n, B)$.

Пример 2.3 *Пусть* $r = 1$, *система* $(2.18), (2.19)$ *имеет вид*

$$\dot{z}_i = u_i - v, \ \ z_i(0) = z_i^0.$$

Утверждение 2.5 *Пусть* $V = D_1(0)$, *и* $0 \in \operatorname{Intco}\{z_j^0, j \in \Lambda, p_1\}$ *для всех* $\Lambda \in \Omega(n - m + 1)$. *Тогда в игре* $\Gamma(n, B)$ *происходит* m*-кратная поимка.*

Пример 2.4 *Пусть в системе* $(2.18), (2.19)$ $l = 1$, $t_0 = 0$, *функция* $a_1(t)$ *имеет вид*

$$a_1(t) = \begin{cases} 0, \ \ \textit{если } t \in [0, 2\pi], \\ \sin t, \ \ \textit{если } t > 2\pi \end{cases}$$

Тогда функция $\varphi_0(t)$ *имеет вид*

$$\varphi_0(t) = \begin{cases} 1, \ \ \textit{если } t \in [0, 2\pi], \\ e^{1-\cos t}, \ \ \textit{если } t > 2\pi. \end{cases}$$

Функция $\varphi_0(t)$ является рекуррентной, но не является почти-периодической ([33]). Предположение 2.6 выполнено.

Утверждение 2.6 *Пусть* $V = D_1(0)$, $m = 1$, $n \geqslant k$,

$$0 \in \operatorname{Intco}\{z_i^0, i \in I, p_1, \ldots, p_r\}.$$

Тогда в игре $\Gamma(n, B)$ *происходит поимка.*

Пример 2.5 *Пусть система* $(2.18), (2.19)$ *имеет вид*

$$\ddot{z}_i + \frac{2}{3t}\dot{z}_i + \frac{1}{9t^{4/3}} z_i = u_i - v,$$

причем $t_0 = 8\pi^2$. *Тогда*

$$\varphi_0(t,s) = \cos(\sqrt[3]{t} - \sqrt[3]{s}),\ \ \varphi_1(t,s) = 3s^{2/3}\sin(\sqrt[3]{t} - \sqrt[3]{s}),$$
$$\xi_i(t) = z_i^0\cos(\sqrt[3]{t}) + 12\pi^2 z_i^1 \sin(\sqrt[3]{t}).$$

Рекуррентность функций $\xi_i(t)$ следует из результатов работы ([33]).

Утверждение 2.7 *Пусть* $V = D_1(0)$, $n \geqslant m + k - 1$ *и выполнены предположения* 2.8, 2.9. *Тогда в игре* $\Gamma(n, B)$ *происходит* m*-кратная поимка.*

Взяв в качестве $\tau_i^0 = t_0 = 8\pi^2$, получаем, что справедливо

Утверждение 2.8 *Пусть* $V = D_1(0)$, $m = 1$, $n \geqslant k$, *и*

$$0 \in \mathrm{Intco}\{z_i^0, i \in I, p_1, \ldots, p_r\}.$$

Тогда в игре $\Gamma(n, B)$ *происходит поимка.*

Заключение

Основные результаты, полученные в диссертации:

1. Достаточные условия поимки группой преследователей одного убегающего в линейных нестационарных дифференциальных играх в предположении, что фундаментальная матрица однородной системы является рекуррентной по Зубову (теорема 1.1);

2. Достаточные условия поимки хотя бы одного убегающего для линейной нестационарной задачи преследования группой преследователей группы убегающих, при условии, что фундаментальная матрица однородной системы является рекуррентной по Зубову функцией, а все убегающие используют одно и то же управление (теорема 1.2);

3. Достаточные условия поимки заданного числа убегающих для линейной нестационарной задачи преследования группой преследователей группы убегающих, при условии, что фундаментальная матрица однородной системы является рекуррентной по Зубову функцией и каждый преследователь может поймать не более одного убегающего (теорема 1.3);

4. Достаточные условия разрешимости задачи преследования в обобщенном нестационарном примере А.С. Понтрягина со многими участниками в предположении рекуррентности по Зубову некоторых функций в терминах начальных позиций и параметров игры (теоремы $2.1, 2.2, 2.4$).

5. Достаточные условия многократной поимки в примере А.С. Понтрягина в предположении рекуррентности по Зубову некоторых функций в терминах начальных позиций и параметров игры (теоремы $2.5, 2.6, 2.7$).

Полученные результаты могут быть использованы в дальнейших исследованиях, например, для получения достаточных условий «мягкой» поимки группой преследователей одного или нескольких убегающих в примере А.С. Понтрягина.

Список обозначений

В работе используются следующие обозначения:

$\mathbb{R}^k$ — евклидово пространство размером k,

$||x||$ — норма вектора $x \in \mathbb{R}^k$,

(x, y) — скалярное произведение векторов $x, y \in \mathbb{R}^k$,

$D_r(a) = \{z : \|z - a\| \leqslant r\}$ — замкнутый шар радиуса r с центром в точке a,

$\mathrm{Int} X$ — внутренность множества X,

$\mathrm{ri} X$ — относительная внутренность множества X,

$\mathrm{co} X$ — выпуклая оболочка множества X,

∂X — граница множества X,

$\mu(X)$ — мера Лебега множества X.

Литература

1. Азамов, А. О существовании стратегии с кусочно–постоянными реализациями/А. Азамов//Математические заметки. — 1987. — Т. 41, № 5. — С. 718–723.

2. Азамов, А. Об альтернативе для игр преследования на бесконечном интервале времени/А. Азамов//Прикладная математика и механика. — 1986. — Т. 50, вып. 4. — С. 561–570.

3. Айзекс, Р. Дифференциальные игры/Р. Айзекс. — М.: Мир, 1967. — 480 с.

4. Банников, А.С. Нестационарная задача группового преследования/А.С. Банников//Известия вузов. Математика. — 2009. — № 5. — С. 3–12.

5. Банников, А.С. Об одной задаче простого преследования/А.С. Банников//Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2009. — Вып. 3. — С. 3–11.

6. Банников, А.С. К нестационарной задаче группового преследования/А.С. Банников, Н.Н. Петров//Труды Института математики и механики УрО РАН. — 2010. — Т. 16, № 1. — С. 40–51.

7. Берж, К. Общая теория игр нескольких лиц/К. Берж. — М.: ИФМЛ, 1961. — 126 с.

8. Благодатских, А.И. Групповое преследование в нестационарном примере Понтрягина/А.И. Благодатских//Дифференциальные уравнения. — 2008. — Т. 44, № 1. — С. 39–44.

9. Благодатских, А.И. Две нестационарные задачи преследования жестко скоординированных убегающих/А.И. Благодатских//Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2008. — Вып. 1. — С. 47 – 60.

10. Благодатских, А.И. Задача группового преследования с равными возможностями при наличии защитников убегающего/А.И. Благодат-

ских//Математическая теория игр и ее приложения. — 2014. — Т. 6, № 2. — С. 32–41.

11. Благодатских, А.И. Многократная поимка в примере Понтрягина/А.И. Благодатских//Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьтерные науки. — 2009. — Вып. 2. — С. 3–12.

12. Благодатских, А.И. О задаче группового преследования в нестационарном примере Понтрягина/А.И. Благодатских//Вестник Удмуртского университета. Математика. — 2007. — № 1. — С. 17–24.

    Теория и системы управления. — 2005. — № 2. — С. 43–45.

13. Благодатских, А.И. Одновременная многократная поимка в задаче простого преследования /А.И. Благодатских//Прикладная математика и механика. — 2009. — Т. 73, вып. 1. — С. 54–59.

14. Благодатских, А.И. Одновременная многократная поимка в конфликтно управляемом процессе/А.И. Благодатских//Прикладная математика и механика. — 2013. — Т. 77, вып. 3. — С. 433–440.

15. Благодатских, А.И. Почти периодические конфликтно управляемые процессы со многими участниками/А.И. Благодатских//Известия РАН. Теория и системы управления. — 2007. — № 2. — С. 83–86.

16. Благодатских, А.И. Пример Понтрягина со многими участниками/А.И. Благодатских//Вестник С.–Петербургского университета. Сер. 10. — 2007. — Вып. 1. — С. 16 – 23.

17. Благодатских, А.И. Конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов/А. И. Благодатских, Н. Н. Петров. — Ижевск: Изд-во «Удмуртский университет», 2009. — 266 с.

18. Болтянский, В.Г. Математические методы оптимального управления/В.Г. Болтянский. — М.: Наука, 1969. — 408 с.

19. Вагин, Д.А. Задача преследования групп жестко скоординированных убегающих/Д.А. Вагин, Н.Н. Петров//Известия РАН. Теория и системы управления. — 2001. — № 5. — С. 75–79.

20. Вагин, Д.А. Об одной задаче группового преследования с фазовыми ограничениями/Д.А. Вагин, Н.Н. Петров//Прикладная математика и механика. — 2002. — Т. 66, вып. 2. — С. 234–241.

21. Виноградова, М. Н. К нестационарным задачам группового преследования/ М.Н. Виноградова, Н.Н. Петров, Н.А. Соловьева//Международная конференция по математической теории управления и механике : тез. докл./Мат. ин-т им. В. А. Стеклова РАН, Владимир. гос. ун-т им. Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых, Моск. гос. ун-т им. М. В. Ломоносова. — Суздаль, 2013. — С. 67-69.

22. Виноградова, М.Н. Поимка двух скоординированных убегающих в линейных рекуррентных дифференциальных играх/М.Н. Виноградова, Н.Н. Петров, Н.А. Соловьева//Труды Института математики и механики УрО РАН. — 2013. — Т. 19, № 1. — С. 41–48.

23. Ганебный, С.А. Игровая задача преследования двумя догоняющими одного убегающего: зависимость решения от параметров/С.А. Ганебный, С.С. Кумков, С. Ле Менек, В.С. Пацко//Известия Института математики и информатики УдГУ. — 2012. — Вып. 1(39). — С. 32–37.

24. Григоренко, Н.Л. Игра простого преследования–убегания групп преследователей и одного убегающего/Н.Л. Григоренко//Вестник МГУ. Вычислительная математика и кибернетика.—1983.—№1.—С. 41 – 47.

25. Григоренко, Н.Л. Задача преследования несколькими объектами/Н.Л. Григоренко//Труды математического института АН СССР. — 1984. — Т.166. — С. 61–75.

26. Григоренко, Н.Л. К теории дифференциальных игр нескольких лиц/Н.Л. Григоренко//Труды МИАН.—1999.—Т. 224.—С. 130 – 138.

27. Григоренко, Н.Л. Математические методы управления несколькими динамическими процессами/Н.Л. Григоренко.—М.: МГУ, 1990.—197 с.

28. Григоренко, Н.Л. Преследование несколькими управляемыми объектами двух убегающих/Н.Л. Григоренко//ДАН СССР. — 1985. — Т. 282, № 5. — С. 1051–1054.

29. Гусятников, П.Б. Теория дифференциальных игр: учеб. пособие/П.Б. Гусятников. — М.:МФТИ, 1982. — 99 с.

30. Гусятников, П.Б. Простая квазилинейная задача преследования/П.Б. Гусятников, Е.С. Половинкин//Прикладная математика и механика. — 1980. — Т. 44, вып. 5. — С. 771–782.

31. Демидов, К.В. Об одной задаче группового преследования с r–кратной поимкой/К.В. Демидов//Вопросы вычислительной математики и программирования. — М.: МГУ,1984. — С. 73–75.

32. Демидович, Б.П. Лекции по математической теории устойчивости/Б.П. Демидович. — М.: Наука, 1967. — 472 с.

33. Зубов, В.И. К теории рекуррентных функций/В.И. Зубов//Сибирский математический журнал. — 1962. — Т. III, № 4. — С. 532–560.

34. Зубов, В.И. Теория колебаний/В.И. Зубов. — М.: Высшая школа, 1979. — 400 с.

35. Ибрагимов, Г.И. Об одной задаче группового преследования/Г.И. Ибрагимов//Автоматика и телемеханика. — 2005. — № 8. — С. 24–35.

36. Ибрагимов, Г.И. Об одной задаче оптимального преследования несколькими объектами одного/Г.И. Ибрагимов//Прикладная математика и механика. — 1998. — Т. 62, вып. 2. — С. 199–205.

37. Ибрагимов, Г.И. О некоторых достаточных условиях оптимальности времени преследования в дифференциальных играх со многими участниками/Г.И. Ибрагимов, Б.Б. Рихсиев//Автоматика и телемеханика. — 2006. — № 4. — С. 16 – 24.

38. Иванов, Р.П. Измеримые стратегии в дифференциальных играх/Р.П. Иванов//Математический сборник. — 1989. — Т. 180, № 1. — С. 119–135.

39. Иванов, Р.П. Простое преследование на компакте/Р.П. Иванов//ДАН СССР. — 1978. — Т. 254, № 6. — С. 1318–1321.

40. Иванов, Р.П. Оптимальность времени преследования в дифференциальной игре многих объектов с простым движением/Р.П. Иванов, Ю.С. Ледяев//Труды математическ. ин–та АН СССР. — 1981. — Т. 158. — С. 87 – 97.

41. Иоффе, А.Д. Теория экстремальных задач/А.Д. Иоффе, В.М. Тихомиров. — М.: Наука, 1974. — 481 с.

Известия АН СССР. Техническая кибернетика. — 1976. — № 2. — С. 8–12.

42. Красовский, А.Н. Синтез смешанных стратегий управления/А.Н.Красовский. — Свердловск: Изд-во Уральского ун–та, 1988. — 151 с.

43. Красовский, Н.Н. Игровые задачи о встрече движений/Н.Н.Красовский. — М.: Наука, 1970. — 420 с.

44. Красовский, Н.Н. Управление динамической системой: задаче о минимуме гарантированного результата/Н.Н.Красовский. — М.: Наука, 1985. — 520 с.

45. Красовский, Н.Н. Позиционные дифференциальные игры/Н.Н. Красовский, А.И. Субботин. — М.: Наука, 1974. — 456 с.

46. Кумков, С.С. Два слабых преследователя в игре против одного убегающего/С.С. Кумков, С. Ле Менек, В.С. Пацко//Автоматика и телемеханика. — 2014.— № 10. — С. 73–96.

47. Кумков, С.С. Множества разрешимости в задаче преследования с двумя догоняющими и одним убегающим/С.С. Кумков, С. Ле Менек, В.С. Пацко//Труды Института математики и механики УрО РАН. — 2014. — Т. 20, № 3. — С. 148–165.

48. Кучкаров, А.Ш. О решении одной задачи преследования с фазовыми ограничениями/А.Ш. Кучкаров, Б.Б. Рихсиев//Автоматика и телемеханика. — 2001. — № 8. — С. 41–45.

49. Лагунов, В.Н. Введение в дифференциальные игры/В.Н. Лагунов. — Вильнюс, 1979. — 342 с.

50. Никольский, М.С. Первый прямой метод Л.С.Понтрягина в дифференциальных играх/М.С. Никольский. — М.: МГУ, 1984. — 65 с.

51. Партхасаратхи, Т. Некоторые вопросы теории игр двух лиц/Т. Партхасаратхи, Т. Рагхаван. — М.: Мир, 1974. — 296 с.

52. Петров, Н.Н. К нестационарной задаче группового преследования с фазовыми ограничениями/Н.Н. Петров//Математическая теория игр и ее приложения. — 2010. — Т. 2, № 4. — С. 74–83.

53. Петров, Н.Н. Многократная поимка в примере Л. С. Понтрягина с фазовыми ограничениями/Н.Н. Петров//Прикладная математика и механика. — 1997. — Т. 61, вып. 5. — С. 747–754.

54. Петров, Н.Н. Нестационарный пример Понтрягина с фазовыми ограничениями/Н.Н. Петров//Проблемы управления и информатики. — 2000. — № 4. — С. 18 – 24.

55. Петров, Н.Н. Об одной задаче группового преследования/Н.Н. Петров//Автоматика и телемеханика. — 1996. — № 6. — С. 48–54.

56. Петров, Н.Н. Об одной задаче группового преследования с фазовыми ограничениями/Н.Н. Петров//Математика. Изв. вузов. — 1994. — № 4(383). — С. 24–29.

57. Петров, Н.Н. Об управляемости автономных систем/Н.Н. Петров//Дифференциальные уравнения.—1968.—Т. 4,№ 4.—С. 606 – 617.

58. Петров, Н.Н. Одна задача простого преследования с фазовыми ограничениями/Н.Н. Петров//Автоматика и телемеханика. — 1992. — № 5. — С. 22–26.

59. Петров, Н.Н. Простое преследование жесткосоединенных убегающих/Н.Н. Петров//Автоматика и телемеханика. — 1997. — № 12. — С. 89 – 95.

60. Петров, Н.Н. Теория игр/Н.Н. Петров. — Ижевск: Изд-во Удмуртского ун–та, 1997. — 197 с.

61. Петров, Н.Н. О некоторых нестационарных задачах группового преследования/Н.Н. Петров, М.Н. Виноградова, Н.А. Соловьева//Динамика систем и процессы управления : тез. докл. Междунар. конф. — Екатеринбург: ИММ УрО РАН : УРФУ, 2014. — С. 141–142.

62. Петров, Н.Н. О дифференциальной игре «казаки–разбойники»/Н.Н. Петров, Н.Никандр. Петров//Дифференциальные уравнения. — 1983. — Т. 19, № 8. — С. 1366 – 1374.

63. Петров, Н.Н. Об одной задаче преследования группы убегающих/Н.Н. Петров, В.А. Прокопенко//Дифференциальные уравнения. — 1987. — Т. 23, № 4. — С. 724 – 726.

64. Петров, Н.Н. Групповое преследование в рекуррентных дифференциальных играх/Н.Н. Петров, Н.А. Соловьева//Известия Института математики и информатики. — 2012. — Вып. 1. — С. 99–100.

65. Петров, Н.Н. Задача группового преследования в рекуррентных дифференциальных играх/Н.Н. Петров, Н.А. Соловьева//Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологий - аль-Хорезми 2012 : тез. междунар. науч. конф. — Ташкент, 2012. — С. 89–90.

66. Петров, Н.Н. Задача преследования группы скоординированных убегающих в линейных рекуррентных дифференциальных играх/Н.Н. Петров, Н.А. Соловьева//Известия РАН. Теория и системы управления. — 2012. — № 6. — С. 29–37.

67. Петров, Н.Н. Многократная поимка в рекуррентном примере Л.С. Понтрягина/Н.Н. Петров, Н.А. Соловьева//Автоматика и телемеханика. — 2016. — № 5. — С. 128–135.

68. Петров, Н.Н. Многократная поимка в рекуррентном примере Л.С. Понтрягина с фазовыми ограничениями/Н.Н. Петров, Н.А. Соловьева//Труды Института математики и механики УрО РАН. — 2015. — Т. 21, № 2. — С. 178–186.

69. Петров, Н.Н. О задаче преследования с фазовыми ограничениями в рекуррентных дифференциальных играх/Н.Н. Петров, Н.А. Соловьева//Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона-Якоби : тезисы докладов II Междунар. семинара. — Екатеринбург : ИММ УрО РАН : УРФУ, 2015. — С. 102–104.

70. Петров, Н.Н., Соловьева Н.А. О некоторых линейных нестационарных задачах группового преследования/Н.Н. Петров, Н.А. Соловьева//Дифференциальные уравнения и оптимальное управление: тезисы докладов—М.:Мат. ин-т им. В.А. Стеклова РАН, 2012.—С.101–103.

71. Петросян, Л.А. Дифференциальные игры преследования/Л.А. Петросян. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1977. — 224 с.

72. Петросян, Л.А. Об одном классе игр преследования: автореферат диссертации на соиск. степени канд. физ. мат. наук/Петросян Леон Аганесович. — Вильнюс, 1965.

73. Петросян, Л.А. Теория игр/Л.А. Петросян, Н.А. Зенкевич, Е.В. Шевкопляс. — Санкт-Петербург: БХВ–Петербург, 2012. — 432 с.

74. Петросян, Л.А. Геометрия простого преследования/Л.А. Петросян, Г.В. Томский. — Новосибирск: Наука, 1983. — 143 с.

75. Петросян, Л.А. Динамические игры и их приложения/Л.А. Петросян, Г.В. Томский. — Л.: Изд–во ЛГУ, 1982. — 252 с.

76. Петросян, Л.А. Преследование на плоскости/Л.А. Петросян, Б.Б. Рихсиев. — М.: Наука, 1991. — 96 с.

77. Пилипенко, Ю.В. Колебательные конфликтно–управляемые процессы/Ю.В. Пилипенко, А.А. Чикрий//Прикладная математика и механика. — 1993. — Т. 57, вып. 3. — С. 3–14.

78. Питцык, М.В. О задаче группового преследования/М.В. Питцык, А.А. Чикрий//Прикладная математика и механика. — 1982. — Т. 46, вып. 5. — С. 730–736.

79. Понтрягин, Л.С. Избранные научные труды : в 3-х т. Т. 2. Дифференциальные уравнения. Теория операторов. Оптимальное управление. Дифференциальные игры/Л.С. Понтрягин; отв. ред. Р.В.Гамкрелидзе. — М.: Наука, 1988. — 575 с.

80. Понтрягин, Л.С. Линейные дифференциальные игры преследования/Л.С. Понтрягин//Математический сборник. — 1980. — Т. 112, № 3. — С. 307 – 330.

81. Понтрягин, Л.С. О линейных дифференциальных играх I/Л.С. Понтрягин//ДАН СССР. — 1967. — Т. 174, № 6. — С. 1278–1280.

82. Понтрягин Л.С. О линейных дифференциальных играх II/Л.С. Понтрягин//ДАН СССР. — 1967. — Т. 175, № 4. — С. 764–766.

83. Понтрягин Л.С. К теории дифференциальных игр/Л.С. Понтрягин//Успехи математических наук.—1966.—Т. 21, вып. 4.—С. 219 – 274.

84. Понтрягин Л.С. Линейная дифференциальная игра преследования: аналитическая теория/Л.С. Понтрягин, Е.Ф. Мищенко//Математический сборник. — 1986. — Т. 131, № 2. — С. 131–158.

85. Пшеничный, Б.Н. Линейные дифференциальные игры/Б.Н. Пшеничный//Автоматика и телемеханика. — 1968. — № 1. — С. 65 – 78.

86. Пшеничный, Б.Н. О линейных дифференциальных играх/Б.Н. Пшеничный//Кибернетика. — 1968. — № 1. — С. 47–53.

87. Пшеничный, Б.Н. Простое преследование несколькими объектами/Б.Н. Пшеничный//Кибернетика. — 1976. — № 3. — С. 145–146.

88. Пшеничный, Б.Н. Структура дифференциальных игр/Б.Н. Пшеничный//ДАН СССР. — 1969. — Т. 184. — № 2. — С. 285–287.

89. Пшеничный, Б.Н. Дифференциальные игры/Б.Н. Пшеничный, В.В. Остапенко. — Киев.: Наукова думка, 1992. — 260 с.

90. Пшеничный, Б.Н. К решению задачи простого преследования несколькими управляемыми объектами/Б.Н. Пшеничный, И.С. Раппопорт//Институт Кибернетики АН УССР. Препринт 79–47. — 1979. — С. 3–6.

91. Пшеничный, Б.Н. Об одной задаче группового преследования/Б.Н. Пшеничный, И.С. Раппопорт//Кибернетика. — 1979. — № 6. — С. 145–146.

92. Рихсиев, Б.Б. Дифференциальные игры с простыми движениями/Б.Б. Рихсиев. — Ташкент: Фан, 1989. — 232 с.

93. Рокафеллар, Р. Выпуклый анализ/Р. Рокафеллар — М.: Мир, 1973. — 472 с.

94. Саматов, Б.Т. О задаче преследования–убегания при линейном изменении ресурса преследователя/Б.Т. Саматов//Математические труды. — 2012. — Т. 15, № 2. — С. 159—171.

95. Саматов, Б.Т. Задача преследования–убегания при интегрально–геометрических ограничениях на управления преследователя/Б.Т. Саматов//Автоматика и телемеханика. — 2013. — № 7. — С. 17–28.

96. Сатимов, Н. О задаче преследования и уклонения от встречи в дифференциальных играх между группами преследователей и убегающих/Н. Сатимов, М.Ш. Маматов //ДАН УзбССР. — 1983. — №4. — С. 3–6.

97. Серков, Д.А. О неулучшаемости стратегий с полной памятью в задачах оптимизации гарантированного результата/Д.А. Серков//Труды Института математики и механики УрО РАН. — 2014. — Т. 20, № 3. — С. 204 – 217.

98. Серков, Д.А. Оптимизации гарантированного результата при функциональных ограничениях на динамическую помеху/Д.А. Серков//Доклады РАН. — 2013. — Т. 450, № 3. — С. 274–278.

99. Субботин, А.И. Оптимизация гарантии в задачах управления/А.И. Субботин, А.Г. Ченцов. — М.: Наука, 1981. — 288 с.

100. Соловьева, Н.А. Групповое преследование в рекуррентном примере Л.С. Понтрягина/Н.А. Соловьева//Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьтерные науки. — 2014. — № 3.— С. 83 – 89.

101. Соловьева, Н.А. О некоторых задачах преследования в рекуррентных дифференциальных играх/Н.А. Соловьева, Н.Н.Петров//Теория управления и математическое моделирование : тезисы докладов Всерос. конф. с междунар. участием. — Ижевск : Удмуртский университет, 2015. — С. 205 – 206.

102. Соловьева, Н.А. Одна задача группового преследования в линейных рекуррентных дифференциальных играх/Н.А. Соловьева//Математическая теория игр и ее приложения. — 2011. — Т. 3, № 1. — С. 81–90.

103. Ухоботов, В.И. Дифференциальная игра с простым движением/В.И. Ухоботов//Известия вузов. Математика. — 1991. — Т. 8. —С. 69 – 72.

104. Ухоботов, В.И. Об одном классе однотипных дифференциальных игр со смешанными ограничениями на управления/В.И. Ухоботов, Д.В. Гущин. — Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьтерные науки. — 2010. — № 3. — С. 81–86.

105. Филиппов, А.Ф. О некоторых вопросах теории оптимального регулирования/А.Ф. Филиппов//Вестник МГУ. Серия Математика, механика. — 1959. — № 6. — С. 25 – 32.

106. Хайдаров, Б.К. Позиционная l–поимка в игре одного убегающего и нескольких преследователей/Б.К. Хайдаров//Прикладная математика и механика. — 1984. — Т. 48, вып. 4. — С. 574–579.

107. Черноусько, Ф.Л. Одна задача уклонения от многих преследователей/Ф.Л. Черноусько//Прикладная математика и механика. — 1976. — Т. 40, вып. 1. — С. 14 – 24.

108. Чикрий, А.А. Гарантированный результат в игровых задачах управления движением/А.А. Чикрий//Труды Института математики и механики УрО РАН. — 2010. — Т. 16, № 5. — С. 223–232.

109. Чикрий, А.А. Групповое преследование при ограниченных координатах убегающего/А.А. Чикрий//Прикладная математика и механика. — 1982. — Т. 46, вып. 6. — С. 906–913.

110. Чикрий, А.А. Конфликтно управляемые процессы/А.А. Чикрий. — Киев: Наук. думка, 1992. — 384 с.

111. Чикрий, А.А. О задаче уклонения в линейной дифференциальной игре/А.А. Чикрий//Автоматика и телемеханика. — 1977. — № 9. — С. 24–29.

112. Чикрий, А.А. О линейных дифференциальных играх с выпуклыми интегральными ограничениями/А.А. Чикрий, А.А. Белоусов//Труды Института математики и механики УрО РАН. — 2013. — Т. 19, № 4. — С. 308–319

113. Чикрий, А.А. Линейные дифференциальные игры с импульсным управлением игроков/А.А. Чикрий, И.И. Матичин//Труды Института математики и механики УрО РАН.—2005.— Т. 11, № 1.—С. 212 – 224.

114. Чикрий, А.А. Линейная задача убегания при взаимодействии групп управляемых объектов/А.А. Чикрий, П.В. Прокопович//Прикладная математика и механика. — 1994. — Т. 58, вып. 4. — С. 12–21.

115. Чикрий, А.А. Линейная задача преследования несколькими объектами/А.А. Чикрий, И.С. Раппопорт//Кибернетика. — 1978. — № 3. — С. 86 – 92.

116. Чикрий, А.А. О задаче группового преследования при наличии фазовых ограничений/А.А. Чикрий, Н.Б. Шишкина//Автоматика и телемеханика. — 1985. — № 2. — С. 59–69.

117. Шевкопляс, Е.В. Уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана в дифференциальных играх со случайной продолжительностью/Е.В. Шевкопляс//Математическая теория игр и ее приложения. — 2009. — Т. 1, № 2. — С. 98–118.

118. Щербаков, Б.А. Рекуррентные решения дифференциальных уравнений и общая теория динамических систем/Б.А. Щербаков//Дифференциальные уравнения. — 1967. — Т. 3, № 9. — С. 1450 – 1460.

119. Barton, J.C. On pursuit curver/J.C. Barton, C.J. Elieser//J. Austral. Mat. Soc. B. — 2000. — V. 41, № 3. — P. 358–371.

120. Berkovitz, L.D. Differential game of generelized pursuit and evasion/L.D. Berkovitz//SIAM J. Contr. and Optimiz. — 1986. — V. 24, № 3. — P. 361–373.

121. Blaquiere, A. Quantitative and qualitative differential games/A. Blaquiere, F. Gerard, G. Leitmann. — New York: Academic Press, 1969. — 172 p.

122. Chodun, W. Differential game of evasion with many pursuers/W. Chodun//J. Math. Anal. and Appl. — 1989. — V. 142, № 2. — P. 370–389.

123. Ibragimov, G. A pursuit-evasion differential game with many pursuers and one evader/G. Ibragimov, N. A. Hussin//Malaysian Journal of Mathematical Sciences. — 2010. — V. 4, № 2. — P. 183–194.

124. Ibragimov, G. Multi pursuer differential game of optimal approach with integral constraints on controls of players/G. Ibragimov, Norshakila Abd Rasid, A. Kuchkarov, F. Ismail//Taiwanese Journal of Mathematics. — 2015. — V. 19, № 3. — P. 963–976.

125. Friedman, A. Differential games/A. Friedman. — New York: John Wiley and Sons, 1971. — 350 p.

126. Hajek, O. Pursuit games/O. Hajek. — New York: Academic Press, 1975. — 266 p.

127. Hagedorn, P. A differential game with two pursuers and one evader/P. Hagedorn, J.X. Breakwell//Journal of Optunization Theory and Applications. — 1976. — V. 1, № 1. — P. 15–29.

128. Leitmann, G. Cooperative and noncooperative many-player differential games/G. Leitmann. — Vienna: Springer-Verlag, 1974. — 76 p.

129. Petrov, N. N. Group pursuit with phase constraints in recurrent Pontryagin‘s example/N.N. Petrov, N.A. Solov‘eva//International Journal of Pure and Applied Mathematics. — 2015. — V. 100, № 2. — P. 263–278.

130. Rzymovski, W. On the game of $n + 1$ cars/W. Rzymovski//J. Math. Analys Appl. — 1984. — V. 99. — P. 109–122.

131. Salimi, M. On a fixed duration pursuit differential game with geometric and integral constraints/M. Salimi, G.I. Ibragimov, S. Siegmund, S. Sharifi//Dynamic Games and Applications. — 2014. — P. 1–17.

132. Steinhaus, H. Definitions for a theory of games and pursuit/H. Steinhaus//Mysl. Academicka. — 1925. — Vol. 1, N1. — P.13–14.