

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина»

На правах рукописи

Хенди Ахмед Саид Абделаиз

Численные алгоритмы решения дробных дифференциальных уравнений с запаздыванием

Специальность 01.01.07 —Вычислительная математика

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
доктор физико-математических наук, профессор  
Пименов В.Г.

Екатеринбург – 2017

# Содержание

|  |           |
|--|-----------|
| Введение   | 4         |
| <b>1 Схемы BDF-типа сдвинутой Чебышевской аппроксимации для дробных дифференциальных уравнений с запаздыванием</b>                                 | <b>23</b> |
| 1.1 Введение . . . . .   | 23        |
| 1.2 Вывод разностного метода . . . . .   | 26        |
| 1.3 Детальный анализ погрешности предложенного метода . . . . .  | 30        |
| 1.4 Численные эксперименты . . . . .   | 34        |
| 1.5 Заключение и замечания . . . . .   | 37        |
| <b>2 Численное решение уравнения диффузии с дробными производными по пространству и с функциональным запаздыванием</b>                             | <b>39</b> |
| 2.1 Введение . . . . .   | 39        |
| 2.2 Метод Кранка-Никольсон для дробного диффузионного уравнения . . . . .  | 41        |
| 2.3 Вывод дробного метода Кранка-Никольсон для одностороннего дробного по пространству уравнения диффузии с функциональным запаздыванием . . . . . | 43        |
| 2.3.1 Формулировка задачи и главные предположения . . . . .  | 44        |
| 2.3.2 Вывод разностной схемы . . . . .   | 45        |
| 2.4 Устойчивость и сходимость предложенной односторонней разностной схемы . . . . .  | 46        |
| 2.4.1 Общая разностная схема с последствием . . . . .  | 47        |
| 2.4.2 Теоремы устойчивости и сходимости . . . . .  | 48        |
| 2.5 Дробный метод Кранка-Никольсон для двухстороннего дробного уравнения диффузии с функциональным запаздыванием . . . . .                         | 51        |
| 2.5.1 Вывод разностной схемы . . . . .   | 51        |
| 2.6 Устойчивость и сходимость предложенной двухсторонней разностной схемы . . . . .  | 52        |
| 2.6.1 Вложение схемы для двухстороннего уравнения дробной диффузии в общую разностную схему . . . . .  | 53        |
| 2.6.2 Теоремы устойчивости и сходимости для двухсторонних разностных схем  | 55        |

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| 2.7      | Численные эксперименты . . . . .   | 55         |
| 2.8      | Заключение . . . . .   | 57         |
| <b>3</b> | <b>Численный метод для дробного по времени уравнения диффузии с постоянным запаздыванием</b>             | <b>59</b>  |
| 3.1      | Введение . . . . .   | 59         |
| 3.2      | Вывод разностной схемы . . . . .   | 61         |
| 3.3      | Анализ разностной схемы . . . . .  | 63         |
| 3.4      | Уравнения диффузии дробного распределенного порядка с запаздыванием . .                                  | 70         |
| 3.5      | Вывод разностной схемы для уравнения диффузии дробного распределенного порядка с запаздыванием . . . . . | 72         |
| 3.6      | Разрешимость, сходимость и устойчивость разностной схемы . . . . .                                       | 74         |
| 3.7      | Численные эксперименты . . . . .   | 81         |
| 3.8      | Численные эксперименты для случая распределенного порядка . . . . .                                      | 83         |
| 3.9      | Заключение . . . . .   | 85         |
| <b>4</b> | <b>Численное решение дробного волнового уравнения с запаздыванием</b>                                    | <b>86</b>  |
| 4.1      | Введение . . . . .   | 86         |
| 4.2      | Конструирование разностной схемы . . . . .   | 88         |
| 4.3      | Разрешимость, сходимость и устойчивость разностной схемы . . . . .                                       | 91         |
| 4.4      | Численные эксперименты . . . . .   | 96         |
| 4.5      | Заключение . . . . .   | 98         |
| <b>5</b> | <b>Численные методы для класса дробных уравнений адвекции-диффузии с функциональным запаздыванием</b>    | <b>99</b>  |
| 5.1      | Вывод разностной схемы . . . . .   | 100        |
| 5.2      | Погрешность аппроксимации . . . . .  | 102        |
| 5.3      | Сходимость метода . . . . .  | 103        |
| 5.4      | Результаты численного эксперимента . . . . .   | 106        |
| 5.5      | Заключение . . . . .   | 107        |
|          | <b>Заключение</b>  | <b>108</b> |
|          | <b>Литература</b>  | <b>110</b> |

# Введение

**Актуальность темы и степень ее разработанности.** Хотя дробные производные и дробные дифференциальные уравнения известны давно как большая и красивая теория [15,127,133], в настоящее время наблюдается всплеск их приложений в математическом моделировании [6,19,21,125,148]. Причинами такого интереса является ряд факторов. Во первых, определение дробной производной, в отличие от целой, дается нелокально, как интеграл от предыстории, поэтому может быть применено для математического моделирования сред с памятью (в приложениях применяется термин активные среды). Во-вторых, во многих моделях физики, биологии и т.д. дробные производные и уравнения дробных порядков точнее описывают рассматриваемое явление. В третьих, дробными уравнениями можно описывать немарковские процессы, что дает мощный инструмент статистике. Качественная теория дробных дифференциальных уравнений, как с одной независимой переменной, так и с дробными частными производными, достаточно хорошо развита, см., например, [14,65,98,137]. При этом, уравнения в частных производных дробных порядков делятся на два существенно различных класса: с дробной производной по пространству и дробной производной по времени. Однако, в силу сложности объектов и невозможности применения аналитических методов отыскания решений, на первый план выходят численные методы. Возможно, первыми работами в этом направлении стали работы М.Х. Шханукова-Лафишева [20,22]. Затем появилось много других работ, в которых конструируются численные методы для разных классов таких уравнений, среди них отметим [27,111,112,123,124,155]. Более подробные ссылки на те работы, результаты которых используются в диссертации, приведены во введениях к каждой главе. Созданы эффективные численные алгоритмы, в том числе и высоких порядков. Однако возникновение нелинейностей может разрушать сходимость этих алгоритмов, и, особенно, внесение нелинейного запаздывания по времени для уравнений с дробной по времени производной.

Уравнения в частных производных с эффектами запаздывания, постоянным или переменным, а также общего функционального вида, включающего и распределенное запаздывание, также широко распространены в моделировании [166]. Среди исследований по численным

методам решения уравнений в частных производных с эффектом запаздывания отметим следующие подходы.

В работе [159] предлагалось проводить дискретизацию с помощью непрерывных методов, чтобы избежать интерполяции между узлами сетки. Варианты метода прямых, в которых проводится дискретизация только по переменным состояния, сводят задачи к численному решению систем функционально-дифференциальных уравнений, см. работы [162, 178]. В работах [4, 94, 102] разрабатывались сеточные методы решения эволюционных уравнений с функциональной зависимостью искомой функции от предыстории по времени и от сдвигов по пространству, в этих работах основное внимание уделялось исследованию общих неявных схем и условиям устойчивости.

В работах В.Г. Пименова и его сотрудников [3, 9–13, 18, 104, 136] основным моментом в построении сеточных методов является идея разделения конечномерной и бесконечномерной составляющей в предыстории искомой функции (разделение настоящего и прошлого). По конечномерной составляющей, входящей в линейную дифференциальную часть уравнения, строятся аналоги известных для объектов без наследственности сеточных методов, а для учета эффекта наследственности применяется интерполяция дискретной предыстории с заданными свойствами. Другая идея состоит в применении экстраполяции продолжением интерполяции дискретной предыстории, такая экстраполяция необходима для реализации неявных методов, а кроме того, это позволяет избегать решения многомерных нелинейных систем при реализации сеточных алгоритмов на каждом временном слое. В совокупности эти идеи позволили создать простые и в то же время эффективные алгоритмы, которые могут быть положены в основу комплекса программ, предназначенного для численного решения уравнений в частных производных. В этих работах рассматривались уравнения параболического типа и гиперболического типа с эффектом наследственности, а также уравнения в частных производных первого порядка (уравнения адвекции) с эффектом наследственности.

Влияние функционального запаздывания для дробных уравнений в частных производных в плане численных методов, насколько нам известно, систематически не проводилось. Имеются лишь первые попытки применения аналога метода шагов для дробных уравнений с постоянным сосредоточенным запаздыванием. В исследованиях диссертационной работы предполагается восполнить этот пробел.

**Цели и задачи диссертационной работы.** Цель работы состоит в разработке сеточных методов решения обыкновенных уравнений с дробной производной и уравнений в частных производных с дробными производными по времени и пространству с эффектами сосредоточенного и функционального запаздывания. К главным задачам работы относятся обоснования устойчивости и сходимости разработанных алгоритмов и изучение факторов,

оказывающих влияние на порядки сходимости.

**Научная новизна.** В диссертационной работе приведены конструкции неявного метода для приближения решения дробного дифференциального уравнения с нелинейным переменным запаздыванием. Метод основан на аппроксимации точного решения на соответствующем отрезке сдвинутыми полиномами Чебышева. Выведены оценки для локальной и глобальной погрешности численного решения. Показано, что в случае переменного запаздывания, порядок сходимости метода зависит по-разному в двух введенных случаях от величины запаздывания.

Для одностороннего и двухстороннего дробного по пространству уравнения диффузии с функциональным запаздыванием сконструированы дробные аналоги метода Кранка-Никольсона. Методы основаны на идее отделения текущего состояния и функции-предыстории. Для учета функции-предыстории мы вводим кусочно-линейную интерполяцию дискретной предыстории и её экстраполяцию продолжением. Показана безусловная устойчивость методов. Доказаны теоремы о порядках сходимости методов, при этом существенно используется техника доказательств подобных утверждений для функционально-дифференциальных уравнений и методы общей теории разностных схем.

Проведено конструирование линеаризированной разностной схемы для решения класса уравнений диффузии с дробной производной по времени, порядка меньше единицы, и с нелинейным запаздыванием. Построены разностные схемы для сосредоточенной дробной производной по времени с учетом эффекта запаздывания, проведен анализ устойчивости и сходимости схем. Конструкции разностных схем переносятся на случай дробной производной по времени распределенного порядка от нуля до единицы.

Сконструирована линеаризованная разностная схема для решения класса диффузионно-волнового (с порядком производной от единицы до двух) уравнения распределенного дробного порядка с нелинейным запаздыванием. Проведен анализ однозначной разрешимости, устойчивости и сходимости схем в терминах дискретного энергетического метода.

Для уравнения адвекции-диффузии с дробными производными по времени и по пространству и с эффектом функционального запаздывания в случае коэффициента при первой производной по времени, отличного от нуля, построены и исследованы разностные схемы. Алгоритмы основаны на использовании сдвинутых формул Грюнвальда-Летникова для аппроксимации дробных производных по пространству и L1-алгоритм для аппроксимации дробных производных по времени, а также используется кусочно-постоянная интерполяция с экстраполяцией продолжением предыстории модели по времени. Алгоритм является аналогом чисто неявного численного метода и сводится на каждом временном шаге к решению линейных алгебраических систем, доказана его разрешимость, исследована его устойчивость и

порядок сходимости.

**Теоретическая и практическая значимость работы.** Уравнения в дробных производных, в том числе с одной независимой переменной, а также в частных производных, с дополнительным эффектом наследственности, играют важную роль при описании различных явлений в науке и технике. Теоретическая значимость работы состоит в создании с единых позиций сеточных методов решения для различных типов уравнений в дробных производных как по времени, так и по пространству, с эффектом запаздывания как сосредоточенным, так и общего вида, в получении условий однозначной разрешимости, устойчивости и порядков сходимости методов. Создание эффективных и обоснованных с точки зрения сходимости численных методов послужит большему распространению таких уравнений в математическом моделировании, в этом состоит практическая значимость работы.

**Методология и методы исследования.** В основе исследования лежат понятия и методы общей теории численных методов для решения обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных, см., например, соответственно, книги Э.Хайер, С.Нерсетт, Г.Ваннер [83] и А.А.Самарского [16]. Так как объектом численного решения являются различные типы дифференциальных уравнений дробного порядка, то в исследованиях используются понятия теории дробного исчисления и дробных уравнений, см. книги [15, 65, 98, 137]. Однако, исследуемые эффекты наследственности потребовали для построения и исследования разрабатываемых численных методов использовать также понятия и методологию численных методов решения функционально-дифференциальных уравнений [5, 8], особенно теоремы сходимости в общей схеме систем с наследственностью, в форме, приспособленной для уравнений с частными производными [9, 11].

**Положения, выносимые на защиту.** Основные результаты работы являются новыми и состоят в следующем:

- для дробного дифференциального уравнения с сосредоточенным запаздыванием приведены конструкции неявного метода, основанного на аппроксимации точного решения на соответствующем отрезке сдвинутыми полиномами Чебышева, выведены оценки для локальной и глобальной погрешности численного решения. Показано, что в случае переменного запаздывания, порядок сходимости метода зависит по-разному в двух введенных случаях от величины запаздывания;
- для одностороннего и двухстороннего дробного по пространству уравнения диффузии с функциональным запаздыванием сконструированы дробные аналоги метода Кранка-Никольсона с кусочно-линейной интерполяцией дискретной предыстории и её экстраполяцией продолжением, доказаны теоремы о порядках сходимости методов;

- построена линеаризованная разностная схема для решения класса уравнений диффузии с дробной производной по времени и с нелинейным запаздыванием, проведен анализ устойчивости и сходимости схем, конструкции разностных схем перенесены на случай дробной производной по времени распределенного порядка от нуля до единицы;
- сконструирована линеаризованная разностная схема для решения класса диффузионно-волнового уравнения распределенного дробного порядка с запаздыванием, проведен анализ однозначной разрешимости, устойчивости и сходимости схем в терминах дискретного энергетического метода;
- для уравнения адвекции-диффузии с дробными производными по времени и по пространству и с эффектом функционального запаздывания в случае коэффициента при первой производной по времени, отличного от нуля, построены разностные схемы, основанные на использовании сдвинутых формул Грюнвальда-Летникова для аппроксимации дробных производных по пространству, L1-алгоритма для аппроксимации дробных производных по времени и кусочно-постоянной интерполяции с экстраполяцией продолжением для учета предыстории модели по времени, доказана разрешимость, устойчивость и исследован порядок сходимости.

**Достоверность результатов.** Достоверность полученных в работе результатов подтверждается соответствующими математическими доказательствами и проведенными компьютерными экспериментами на тестовых примерах.

**Структура и объем работы.** Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы. Главы разбиты на параграфы. Параграфы нумеруются двойными индексами, первый индекс — номер главы, второй индекс — номер параграфа, некоторые параграфы разбиты на подразделы, тогда они имеют тройную нумерацию. Формулы нумеруются двойными индексами: первый индекс — номер главы, второй индекс — номер формулы в главе, нумерация таблиц также двойная. Нумерация формул введения одинарная. Нумерация утверждений сквозная по всему тексту, нумерация утверждений введения повторяет нумерацию соответствующих утверждений основного текста. Библиография содержит 191 наименование. Общий объем работы составляет 124 страниц машинописного текста.

#### **Краткое содержание работы.**

В главе 1 конструируются и исследуются численные алгоритмы решения дробного дифференциального уравнения

$$D^{(\beta)}y(t) = f(t, y(t), y(t - \tau)), \quad 0 < \beta \leq 1, \quad (1)$$

с начальным условием

$$y(t) = \phi(t), \quad t \in [-\tau, 0], \quad (2)$$



где запаздывание  $\tau > 0$  может быть постоянным или переменным относительно  $t$ , дробный дифференциальный оператор Капуто  $D^{(\beta)}$  порядка  $\beta$  определяется формулой

$$D^{(\beta)}y(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^t \frac{y'(\xi)}{(t-\xi)^\beta} d\xi.$$

Численный метод основан на аппроксимации функции  $y(t)$  и её дробной производной разложениями по сдвинутым многочленам Чебышева

$$T_n^*(x) = T_n\left(\frac{2x}{L} - 1\right), \text{ где } T_0^*(x) = 1, \quad T_1^*(x) = \frac{2x}{L} - 1,$$

определенным на отрезке  $[0, L]$ . Их аналитическое выражение

$$T_n^*(x) = n \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \frac{(n+k-1)! 2^{2k}}{(n-k)!(2k)! L^k} x^k,$$

где  $T_n^*(0) = (-1)^n$ ,  $T_n^*(L) = 1$ .

Во вводном разделе 1.1 приводится обзор некоторых работ, в которых возникают модели с дробными дифференциальными уравнениями и с дробными дифференциальными уравнениями с наличием запаздывания, а также работ, где изучались математические вопросы существования и единственности решений таких уравнений. Кроме того, дается краткий обзор работ, посвященных разработке численных методов решения уравнений с дробными производными.

В разделе 1.2 выводится разностный алгоритм, относящийся к BDF-типу. В формулах этого типа (BDF - формулы дифференцирования назад) на каждом отрезке разбиения  $[t_s, t_{s+1}]$  производится аппроксимация левой части уравнения (1), при этом шаг  $h = t_{s+1} - t_s$  может быть переменным. Отрезок  $[t_s, t_{s+1}]$  путем замены переменных  $t = t_s + \frac{h\alpha}{L}$ ,  $\alpha \in [0, L]$ , сводится к отрезку  $[0, L]$ :  $y(t) = y\left(t_s + \frac{h\alpha}{L}\right) = \bar{y}(\alpha)$ . Используем аппроксимацию

$$\bar{y}(\alpha) \approx \sum_{n=0}^N {}'' a_n T_n^*(\alpha), \quad a_n = \frac{2}{N} \sum_{r=0}^N {}'' y(t_s + \zeta_r h) T_n^*(\alpha_r),$$

где

$$\zeta_r = \frac{\alpha_r}{L}, \quad \alpha_r = \frac{L}{2} - \frac{L}{2} \cos\left(\frac{\pi r}{N}\right).$$

$$D^{(\beta)}\bar{y}(\alpha) \approx \frac{2}{N} \sum_{n=0}^N {}'' \sum_{r=0}^N {}'' y(t_s + \zeta_r h) T_n^*(\alpha_r) D^{(\beta)} T_n^*(\alpha(t)),$$

символ суммы с двумя штрихами означает сумму с первым и последним членом, разделенными на 2. Используя аналитическую форму сдвинутых полиномов Чебышева и свойства дробных производных Капуто, выводится формула для неявного метода

$$f(t_s + \zeta_\ell h, y(t_s + \zeta_\ell h), y(t_s + \zeta_\ell h - \tau)) = \tag{3}$$

$$\frac{4}{N h^\beta} \sum_{n=\lceil\beta\rceil}^N {}'' \sum_{r=0}^N {}'' \sum_{j=0}^N \sum_{k=\lceil\beta\rceil}^n \frac{(-1)^{(n-k)} n(n+k-1) \Gamma(k-\beta+\frac{1}{2}) y(t_s + \zeta_r h) T_n^*(\alpha_r)}{b_j \Gamma(k+\frac{1}{2})(n-k)! \Gamma(k-\beta+j+1) \Gamma(k-\beta-j+1)} T_j^*(\alpha_\ell).$$

Заметим, что так как запаздывание  $\tau$  произвольно, в том числе и переменное, величина  $(t_s + \zeta_\ell h - \tau)$  может оказаться не в узлах сетки  $t_\ell$ , поэтому мы устанавливаем приближение для функции с запаздывающим аргументом  $y(t - \tau)$  следующим образом: определим величину  $\delta_\ell$ , связанную с запаздыванием  $\tau$ :  $\tau = (m_s + \delta_\ell)h$  таким образом, что  $0 \leq \delta_\ell < 1$ , где  $m_s$  — положительное целое, тогда  $y(t_\ell - \tau(t_\ell)) \approx y(t_0 + (s - m_s)h + (\zeta_\ell - \delta_\ell)h)$ .

Как частные случаи, из системы (3) выводятся четырехэтапные (при  $N = 4$ ) методы для различных  $\beta$ . Например, при  $\beta = \frac{1}{2}$  получаются следующие четыре уравнения:

$$h^{1/2}\mathbf{f}_1 = -(\sqrt{2}(335 + 182\sqrt{2})a)y(t_s) + ((280 + 320\sqrt{2})a)y(t_s + \zeta_1 h) - (12\sqrt{2}(1 - 7\sqrt{2})a)y(t_s + \zeta_2 h) \\ - ((56 + 16\sqrt{2})a)y(t_s + \zeta_3 h) + ((-28 + 43\sqrt{2})a)y(t_s + \zeta_4 h),$$

$$h^{1/2}\mathbf{f}_2 = -(71\sqrt{2}/d)y(t_s) - ((168 + 40\sqrt{2})/d)y(t_s + \zeta_1 h) + (180\sqrt{2}/d)y(t_s + \zeta_2 h) \\ + ((168 - 40\sqrt{2})/d)y(t_s + \zeta_3 h) - ((29\sqrt{2})/d)8y(t_s + \zeta_4 h),$$

$$h^{1/2}\mathbf{f}_3 = -(\sqrt{2}(335 - 182\sqrt{2})b)y(t_s) + ((56 - 16\sqrt{2})b)y(t_s + \zeta_1 h) - (12\sqrt{2}(1 + 7\sqrt{2})b)y(t_s + \zeta_2 h) \\ + (-280 + 320\sqrt{2})by(t_s + \zeta_3 h) + ((28 + 43\sqrt{2})b)y(t_s + \zeta_4 h),$$

$$h^{1/2}\mathbf{f}_4 = -(43\sqrt{2}c)y(t_s) + ((168 - 152\sqrt{2})c)y(t_s + \zeta_1 h) + (12\sqrt{2}c)y(t_s + \zeta_2 h) \\ - ((168 + 152\sqrt{2})c)y(t_s + \zeta_3 h) + 335\sqrt{2}cy(t_s + \zeta_4 h).$$

где  $\mathbf{f}_\ell := f(t_s + \zeta_\ell h, y(t_s + \zeta_\ell h), d_\ell)$ ,

$$a = \frac{1}{105}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin\left(\frac{\pi}{8}\right), \quad b = \frac{1}{105}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos\left(\frac{\pi}{8}\right), \quad c = \frac{1}{105}\sqrt{\frac{2}{\pi}}, \quad d = 105\sqrt{\pi}.$$

Для применения этого неявного численного метода систему можно решать, например, с помощью системы аналитических вычислений МАТНЕМАТИСА.

В разделе 1.3 проводится анализ построенного метода при  $N = 4$ . Метод записывается в виде векторной одношаговой формулы и показывается, что он сводится к некоторому методу типа Рунге-Кутты, для которого выписывается таблица Бутчера. В двух утверждениях проводится анализ локальной и глобальной погрешности метода. В частности, при некоторых условиях справедлива теорема

**Теорема 2.** *Для глобальной погрешности  $E$  выполняется оценка  $\|E\| \leq Ch^{4\beta}$ , если  $\delta_\ell = 0$ , и  $\|E\| \leq C(h^{4\beta} + h^2)$ , если  $0 < \delta_\ell < 1$ ,  $C$  — постоянная.*

В разделе 1.4 приводятся результаты численных экспериментов на тестовых примерах: первая модель основана на эффекте зашумления света лазера, который отражает зеркало, вторая модель — дробный вариант модели Хатчинсона, которая описывает скорость роста популяций. Показано, что теоретические результаты о порядке сходимости совпадают с результатами, полученными в результате численного экспериментирования.

В последнем разделе главы приводятся некоторые выводы и заключения по рассмотренному алгоритму.

В главе 2 конструируются сеточные численные методы для дробного по состоянию уравнения диффузии с эффектом функционального запаздывания по времени.

В разделе 2.1 проводится обзор работ, посвященных исследованию численных методов решения уравнений диффузии с запаздыванием, а также уравнений диффузии дробного порядка по состоянию. Особое внимание уделяется в следующем разделе 2.2 аналогу метода Кранка-Никольсон для уравнения диффузии с левосторонней дробной производной по состоянию и для двухсторонней дробной производной по состоянию. Результаты этого раздела хотя и принадлежат другим авторам, приведены в данной диссертации для удобства изложение дальнейшего материала.

В разделе 2.3, который разделяется на подразделы, строится и исследуется аналог метода Кранка-Никольсон для одностороннего дробного по состоянию уравнения диффузии с функциональным запаздыванием. В подразделе 2.3.1 рассматривается задача

$$\frac{\partial u}{\partial t} = d \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} + f(x, t, u(x, t), u_t(x, \cdot)), \quad x \in [x_0, X], \quad t \in [t_0, T], \quad d > 0, \quad (4)$$

$u_t(x, \cdot) = \{u(x, t + s), t_0 - \tau \leq s < t_0\}$  — функция предыстории,  $\tau > 0$  — величина запаздывания. Дробная производная (левосторонняя) Римана порядка  $1 < \alpha \leq 2$  определяется формулой

$$\frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_{x_0}^x \frac{f(\zeta)}{(x - \zeta)^{\alpha+1-n}} d\zeta,$$

где  $n = [\alpha] + 1 = 2$  — целое.

Заданы начальные и граничные условия

$$u(x, t) = \varphi(x, t), \quad x \in [x_0, X], \quad t \in [t_0 - \tau, t_0], \quad (5)$$

$$u(x_0, t) \equiv 0, \quad u(X, t) = b(t), \quad t \in [t_0, T]. \quad (6)$$

Будем предполагать, что функции  $\varphi(x, t)$ ,  $b(t)$  и функционал  $f$  таковы, что задача (4) — (6) имеет единственное решение  $u(x, t)$ . Обозначим через  $Q = Q[-\tau, 0)$  множество функций  $u(\xi)$ , кусочно-непрерывных на  $[-\tau, 0)$  с конечным числом точек разрыва первого рода, в точках разрыва непрерывных справа. Определим норму функций соотношением  $\|u(\cdot)\|_Q = \sup_{\xi \in [-\tau, 0)} |u(\xi)|$ . Дополнительно будем предполагать, что функционал  $f(x, t, u, v(\cdot))$  определенный на  $[x_0, X] \times [t_0, T] \times R \times Q$ , липшицев по последним двум аргументам, т.е. существует постоянная  $L_f$ , такая что для всех  $x \in [x_0, X]$ ,  $t \in [t_0, T]$ ,  $u^1 \in R$ ,  $u^2 \in R$ ,  $v^1(\cdot) \in Q$  и  $v^2(\cdot) \in Q$  выполняется условие

$$|f(x, t, u^1, v^1(\cdot)) - f(x, t, u^2, v^2(\cdot))| \leq L_f(|u^1 - u^2| + \|v^1(\cdot) - v^2(\cdot)\|_Q).$$

В подразделе 2.3.2 конструируется разностная схема для поставленной задачи.

Пусть  $h = (X - x_0)/N$ , обозначим  $x_i = x_0 + ih$ ,  $i = 0, \dots, N$ , и  $\Delta = (T - t_0)/M$ ,  $t_j = t_0 + j\Delta$ ,  $j = 0, \dots, M$ . Пусть  $\tau/\Delta = m$  — положительное целое. Обозначим через  $u_j^i$  приближения функции  $u(x_i, t_j)$  в узлах.

Для каждого фиксированного  $i = 0, \dots, N$ , введем дискретную предысторию по времени в точках  $t_j$ ,  $j = 0, \dots, M$ :  $\{u_k^i\}_j = \{u_k^i, j - m \leq k \leq j\}$ . Отображение  $I : \{u_k^i\}_j \rightarrow v^i(t)$ ,  $t \in [t_j - \tau, t_j + \Delta/2]$  назовем оператором интерполяции-экстраполяции дискретной предыстории. Мы будем использовать кусочно-линейную интерполяцию с экстраполяцией продолжением

$$v^i(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta}(u_l^i(t - t_{l-1}) + u_{l-1}^i(t_l - t)), & t_{l-1} \leq t \leq t_l, \quad 1 \leq l \leq j, \\ \frac{1}{\Delta}(u_j^i(t - t_{j-1}) + u_{j-1}^i(t_j - t)), & t_j \leq t \leq t_j + \Delta/2, \\ \varphi(x_i, t), & t_0 - \tau \leq t \leq t_0. \end{cases}$$

Для приближения дробной производной мы будем использовать сдвинутую вправо формулу Грюнвальда, тогда

$$\frac{\partial^\alpha u(x_i, t_{j+1/2})}{\partial x^\alpha} \approx \frac{1}{2}(\delta_{\alpha,x} u_{j+1}^i + \delta_{\alpha,x} u_j^i), \quad \delta_{\alpha,x} u_j^i = \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{i+1} g_{\alpha,k} u_j^{i-k+1}. \quad (7)$$

Здесь и в дальнейшем  $g_{k,\alpha} = \frac{\Gamma(k-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(k+1)}$ .

Применяя обычную аппроксимацию для производной по времени, аппроксимацию (7) для дробной производной по пространству и используя интерполяцию с экстраполяцией для предыстории функции, получаем аналог метода Кранка-Никольсон

$$\frac{u_{j+1}^i - u_j^i}{\Delta} = \frac{d}{2}(\delta_{\alpha,x} u_{j+1}^i + \delta_{\alpha,x} u_j^i) + f_{j+\frac{1}{2}}^i, \quad (8)$$

$$f_{j+\frac{1}{2}}^i = f(x_i, t_j + \frac{\Delta}{2}, v^i(t_j + \frac{\Delta}{2}), v_{t_j+\frac{\Delta}{2}}^i(\cdot)), \quad i = 1, \dots, N-1, j = 0, \dots, M-1,$$

с соответствующими начальными и граничными условиями.

В разделе 2.4 проводится исследование устойчивости и сходимости схемы (8).

Вводится понятие невязки без интерполяции метода (8)

$$\psi_j^i = \frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_{j+1})}{\Delta} - \frac{d}{2}(\hat{\delta}_{\alpha,x} u(x_i, t_{j+1}) + \hat{\delta}_{\alpha,x} u(x_i, t_j)) - \hat{f}_{j+\frac{1}{2}}^i,$$

$$\hat{\delta}_{\alpha,x} u(x_i, t_j) = \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{i+1} g_{\alpha,k} u(x_{i-k+1}, t_j), \quad \hat{f}_{j+\frac{1}{2}}^i = f(x_i, t_{j+\frac{1}{2}}, u(x_i, t_{j+\frac{1}{2}}), u_{t_{j+\frac{1}{2}}}^i(x_i, \cdot))$$

Доказывается, что при определенных условиях гладкости точного решения невязка без интерполяции имеет порядок  $\Delta^2 + h$ . Аналогичным образом вводится понятие невязки с интерполяцией точного решения и исследуется её порядок.

В подразделе 2.4.1 проводится сведение схемы (8) к общей разностной схеме систем с наследственностью [9, 11].

Метод (8) переписывается в виде

$$(I - \frac{d\Delta}{2}\delta_{\alpha,x})u_{j+1}^i = (I + \frac{d\Delta}{2}\delta_{\alpha,x})u_j^i + \Delta f_{j+\frac{1}{2}}^i, \quad (9)$$

$I$  — единичный оператор.

Вводится вектор  $y_j = (u_j^1, u_j^2, \dots, u_j^{N-1}) \in Y$ , с нормой

$$\|y_j\|_Y = \max_{1 \leq i \leq N-1} |u_j^i|.$$

Тогда (9) может быть переписан в виде

$$(E - A)y_{j+1} = (E + A)y_j + \Delta F_{j+\frac{1}{2}}, \quad (10)$$

где элементы матрицы  $A$  размера  $(N-1) \times (N-1)$  имеют вид

$$A_{ij} = \begin{cases} \sigma g_{\alpha, i-j+1} & j \leq i-1, \\ \sigma g_{\alpha, 1} & j = i, \\ \sigma g_{\alpha, 0} & j = i+1, \\ 0 & j > i+1, \end{cases}$$

$\sigma = \frac{d\Delta}{2h^\alpha}$ ,  $E$  — единичная матрица,  $F_{j+\frac{1}{2}} = (f_{j+\frac{1}{2}}^1, f_{j+\frac{1}{2}}^2, \dots, f_{j+\frac{1}{2}}^{N-1})$

Так как матрица  $E - A$  обратима, это уравнение может быть переписано в виде

$$y_{j+1} = S y_j + \Delta \Phi(t_j, I(\{y_k\}_j)), \quad (11)$$

$S = (E - A)^{-1}(E + A)$ ,  $\Phi(t_j, I(\{y_k\}_j)) = (E - A)^{-1}F_{j+\frac{1}{2}}$ ,  $I$  — оператор кусочно-линейной интерполяции с экстраполяцией продолжением.

В подразделе 2.4.2 приводятся доказательства теорем устойчивости и сходимости метода (8), представленного в виде (11).

**Лемма 7.** *Если  $1 < \alpha < 2$ , тогда все собственные числа  $\lambda$  матрицы  $S = (E - A)^{-1}(E + A)$  удовлетворяют условию  $|\lambda| < 1$ .*

Отсюда следует теорема

**Теорема 4.** *Дробный метод Кранка-Никольсон, с использованием сдвинутой аппроксимации Грюнвальда, примененный к дробному по пространству уравнению диффузии с функциональным запаздыванием (8) (или переписанный в виде (11)) является безусловно устойчивым при  $1 < \alpha < 2$ .*

Далее в этом подразделе излагается теорема о порядке сходимости в общей разностной схеме систем с наследственностью [9, 11], модифицированная для рассматриваемого случая. Как следствие, получаем утверждение

**Замечание 1.** *Если условия леммы 5 (гладкость точного решения) и леммы 7 выполняются, то разностная схема (8) с кусочно-линейной интерполяцией и экстраполяцией продолжением сходится с порядком  $\Delta^2 + h$ .*

В разделе 2.5 строится и исследуется аналог метода Кранка-Никольсон для двухстороннего дробного по состоянию уравнения диффузии с функциональным запаздыванием

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c_+(x) \frac{\partial^\alpha u}{\partial_+ x^\alpha} + c_-(x) \frac{\partial^\alpha u}{\partial_- x^\alpha} + f(x, t, u(x, t), u_t(x, \cdot)), \quad (12)$$

где  $x \in [0, X]$ ,  $t \in [t_0, T]$ ,  $c_+(x) > 0$ ,  $c_-(x) > 0$ ,  $u_t(x, \cdot) = \{u(x, t + s), -\tau \leq s < 0\}$  — функция предыстории,  $\tau > 0$  — величина запаздывания, с начальными условиями

$$u(x, t) = \varphi(x, t), \quad x \in [0, X], \quad t \in [t_0 - \tau, t_0],$$

и граничными условиями

$$u(0, t) = 0, \quad u(X, t) = 0, \quad t \in [t_0, T].$$

Здесь левосторонняя (+) и правосторонняя (−) дробные производные в определяются в смысле дробных производных Римана-Лиувилля

$$\begin{aligned} \frac{d^\alpha f(x)}{dx_+^\alpha} &= \frac{1}{\Gamma(2 - \alpha)} \frac{d^2}{dx^2} \int_0^x \frac{f(\zeta)}{(x - \zeta)^{\alpha-1}} d\zeta, \quad 1 < \alpha \leq 2, \\ \frac{d^\alpha f(x)}{dx_-^\alpha} &= \frac{1}{\Gamma(2 - \alpha)} \frac{d^2}{dx^2} \int_X^x \frac{f(\zeta)}{(\zeta - x)^{\alpha-1}} d\zeta, \quad 1 < \alpha \leq 2. \end{aligned}$$

В подразделе 2.5.1 проводится вывод разностной схемы, при этом используются обозначения как в подразделе 2.3.2. Используя сдвинутые формулы Грюнвальда для левой и правой производной по пространству, применяя обычную аппроксимацию для производной по времени и используя кусочно-линейную интерполяцию с экстраполяцией продолжением предыстории дискретной функции, проводится дискретизация (12) в узлах  $(x_i, t_{j+1/2})$  и получается аналог схемы Кранка-Никольсон

$$\frac{u_{j+1}^i - u_j^i}{\Delta} = \frac{1}{h^\alpha} \left( c_+^i \sum_{s=0}^{i+1} g_{\alpha,s} u_{j+1/2}^{i-s+1} + c_-^i \sum_{s=0}^{N-i+1} g_{\alpha,s} u_{j+1/2}^{i+s-1} \right) + f_{j+1/2}^i, \quad (13)$$

$$f_{j+1/2}^i = f(x_i, t_j + \frac{\Delta}{2}, v^i(t_j + \frac{\Delta}{2}), v_{t_j + \frac{\Delta}{2}}^i(\cdot)), \quad i = 1, \dots, N-1, \quad j = 0, \dots, M-1,$$

$$c_+^i = c_+(x_i), \quad c_-^i = c_-(x_i), \quad u_{j+1/2}^i = \frac{1}{2}(u_j^i + u_{j+1}^i),$$

с соответствующими начальными и граничными условиями.

В разделе 2.6 проводится исследование устойчивости и сходимости схемы (13) по плану раздела 2.4. А именно, вводятся определения невязки без интерполяции и невязки с интерполяцией метода (13), изучается их порядок, который при определенных предположениях о гладкости решения оказывается равным  $\Delta^2 + h$ . Метод (13) переписывается в виде (10), где

элементы матрицы  $A$  размерности  $N - 1 \times N - 1$  имеют вид

$$A_{ij} = \begin{cases} -(\xi_i + \eta_i)g_{\alpha,1} & j = i, \\ -(\xi_i g_{\alpha,2} + \eta_i g_{\alpha,0}) & j = i - 1, \\ -(\xi_i g_{\alpha,0} + \eta_i g_{\alpha,2}) & j = i + 1, \\ -\xi_i g_{\alpha,i-j+1} & j < i - 1, \\ -\xi_i g_{\alpha,j-i+1} & j > i + 1, \end{cases}$$

$$\xi_i = \frac{c_+^i \Delta}{2h^\alpha}, \quad \eta_i = \frac{c_-^i \Delta}{2h^\alpha}.$$

Доказывается обратимость матрицы  $E + A$  и метод сводится к виду (11). При  $1 < \alpha < 2$  доказывается безусловная устойчивость метода. При этом условии, а также при определенных условиях гладкости точного решения справедливо утверждение

**Теорема 7.** *Метод (13) с кусочно-линейной интерполяцией и экстраполяцией продолжением имеет порядок сходимости  $\Delta^2 + h$ .*

В разделе 2.7 приведены результаты численных экспериментов для уравнений диффузии с односторонней и двухсторонней дробной производной по пространству и с эффектом переменного запаздывания по времени. В каждом из этих тестовых примеров имеется точное решение, поэтому сравнивая приближенные решения с точным, можно отследить изменение погрешностей при изменении пространственных и временных шагов. Численные эксперименты показали хорошее соответствие с теоретическими результатами.

В последнем разделе главы приводятся некоторые выводы и заключения по анализу аналога метода Кранка-Никольсон для дробного по пространству уравнения диффузии с функциональным запаздыванием по времени.

В главе 3 рассматриваются дробные по времени уравнения диффузии с нелинейным эффектом постоянного сосредоточенного запаздывания

$$\frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial t^\alpha} d\alpha = K \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + f(x, t, u(x, t), u(x, t - s)), \quad (14)$$

со следующими начальными и граничными условиями

$$u(x, t) = \psi(x, t), \quad 0 \leq x \leq L, \quad t \in [-s, 0], \quad u(0, t) = \phi_0(t), \quad u(L, t) = \phi_L(t), \quad t > 0,$$

где  $s > 0$  — величина запаздывания,  $K$  — положительная постоянная. Дробная производная понимается в смысле Капуто, то есть

$$\frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial t^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_0^t (t - \zeta)^{-\alpha} \frac{\partial u(x, \zeta)}{\partial \zeta} d\zeta, \quad 0 < \alpha < 1.$$

В разделе 3.1 делается обзор смежных результатов и применений в математическом моделировании, проводится постановка задачи и делаются основные предположения.

В разделе 3.2 проводится вывод разностной схемы. Возьмем два положительных целых числа  $M$  и  $n$ , пусть  $h = \frac{L}{M}$ ,  $\tau = \frac{s}{n}$ , обозначим  $x_i = ih$ ,  $t_k = k\tau$  и  $t_{k+1/2} = (k + \frac{1}{2})\tau = \frac{1}{2}(t_k + t_{k+1})$ . Определим  $v_i^{k+1/2} = \frac{1}{2}(v_i^k + v_i^{k+1})$  и  $\delta_x^2 v_i^k = \frac{1}{h^2}(v_{i+1}^k - 2v_i^k + v_{i-1}^k)$ .

Определим сеточную функцию  $U(i, k) = u(x_i, t_k)$ . Используем аппроксимацию для дробной производной Капуто в  $t_{k+1/2}$  с  $0 < \alpha < 1$ :

$$\frac{\partial^\alpha u(x_i, t_{k+1/2})}{\partial t^\alpha} = \omega_1 U_i^k + \sum_{m=1}^{k-1} (\omega_{k-m+1} - \omega_{k-m}) u_i^m - \omega_k U_i^0 + \frac{\sigma}{2^{1-\alpha}} (U_i^{k+1} - U_i^k) + O(\tau^{2-\alpha}), \quad (15)$$

где

$$\omega_i = \sigma \left( \left( i + \frac{1}{2} \right)^{1-\alpha} - \left( i - \frac{1}{2} \right)^{1-\alpha} \right),$$

$$\sigma = \frac{1}{\tau^\alpha \Gamma(2-\alpha)}, \quad 0 \leq i \leq M, \quad 0 \leq k \leq N-1.$$

Применим (15) к уравнению (14) в точках  $(x_i, t_{k+1/2})$ , получим

$$\begin{aligned} \omega_1 U_i^k + \sum_{m=1}^{k-1} (\omega_{k-m+1} - \omega_{k-m}) U_i^m - \omega_k U_i^0 + \frac{\sigma}{2^{1-\alpha}} (U_i^{k+1} - U_i^k) + O(\tau^{2-\alpha}) \\ = K \frac{\partial^2 u(x_i, t_{k+1/2})}{\partial x^2} + f(x_i, t_{k+1/2}, u(x_i, t_{k+1/2}), u(x_i, t_{k+1/2} - s)). \end{aligned} \quad (16)$$

**Лемма 14.** Пусть для  $g = (g_0, g_1, \dots, g_M)$  определен оператор  $\mathfrak{A}$  следующим образом

$$\mathfrak{A}g_i = \frac{1}{12}(g_{i-1} + 10g_i + g_{i+1}), \quad 1 \leq i \leq M-1.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}[\omega_1 U_i^k + \sum_{m=1}^{k-1} (\omega_{k-m+1} - \omega_{k-m}) U_i^m - \omega_k U_i^0 + \frac{\sigma}{2^{1-\alpha}} (U_i^{k+1} - U_i^k)] = \\ = K \delta_x^2 U_i^{k+1/2} + \mathfrak{A}f(x_i, t_{k+1/2}, \frac{3}{2}U_i^k - \frac{1}{2}U_i^{k-1}, \frac{1}{2}U_i^{k+1-n} + \frac{1}{2}U_i^{k-n}) + R_i^k, \end{aligned}$$

где

$$|R_i^k| = O(h^4 + \tau^{2-\alpha}), \quad 1 \leq i \leq M-1, \quad 0 \leq k \leq N-1.$$

Применяя  $\mathfrak{A}$  к (16), пренебрегая  $R_i^k$  и заменяя  $U_i^k$  на  $u_i^k$  получаем вид разностной схемы

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} \left[ \omega_1 u_i^k + \sum_{m=1}^{k-1} (\omega_{k-m+1} - \omega_{k-m}) u_i^m - \omega_k u_i^0 + \frac{\sigma^l}{2^{1-\alpha l}} (u_i^{k+1} - u_i^k) \right] = \\ = K \delta_x^2 u_i^{k+1/2} + \mathfrak{A}f \left( x_i, t_{k+1/2}, \frac{3}{2}u_i^k - \frac{1}{2}u_i^{k-1}, \frac{1}{2}u_i^{k+1-n} + \frac{1}{2}u_i^{k-n} \right), \end{aligned} \quad (17)$$

с соответствующими начальными и граничными условиями.

В разделе 3.3 проводится анализ этой разностной схемы. Доказываются утверждения:

**Теорема 8.** Разностная схема (17) имеет единственное решение.

**Теорема 9.** Метод (17) сходится с порядком  $\tau^{2-\alpha} + h^4$ .



**Теорема 10.** *Разностная схема (17) безусловно устойчива.*

В разделе 3.4 рассматриваются уравнения диффузии, распределенного по времени порядка, с нелинейным эффектом постоянного сосредоточенного запаздывания

$$\int_0^1 \omega(\alpha) \frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial t^\alpha} d\alpha = K \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + f(x, t, u(x, t), u(x, t - s)), \quad t > 0, \quad 0 \leq x \leq L, \quad (18)$$

где  $s > 0$  — величина запаздывания,  $K$  — положительная постоянная и  $\omega(\alpha) > 0$  — весовая функция, с начальными и граничными условиями как для уравнения (14). Дробная производная понимается в смысле Капуто. Делается обзор работ, посвященных моделированию с помощью уравнений распределенного дробного порядка, а также изучению численных методов их решения. Приводятся основные предположения.

В разделе 3.5 проводится вывод разностной схемы для уравнения (18). Для аппроксимации интеграла в (18) используется составная формула Симпсона с шагом разбиения  $\Delta\alpha = \frac{1}{2J}$ . Используя ту же методику, что и в разделе 3.2, а также обозначения раздела 3.2, получаем разностную схему

$$\begin{aligned} \Delta\alpha \sum_{l=0}^{2J} \gamma_l \omega(\alpha_l) \mathfrak{A} \left[ \omega_1^l u_i^k + \sum_{m=1}^{k-1} (\omega_{k-m+1}^l - \omega_{k-m}^l) u_i^m - \omega_k^l u_i^0 + \frac{\sigma^l}{2^{1-\alpha_l}} (u_i^{k+1} - u_i^k) \right] = \\ = K \delta_x^2 u_i^{k+1/2} + \mathfrak{A} f \left( x_i, t_{k+1/2}, \frac{3}{2} u_i^k - \frac{1}{2} u_i^{k-1}, \frac{1}{2} u_i^{k+1-n} + \frac{1}{2} u_i^{k-n} \right), \end{aligned} \quad (19)$$

где  $\alpha_l = l\Delta\alpha$ ,

$$\gamma_l = \begin{cases} \frac{1}{3}, & l = 0, 2J, \\ \frac{2}{3}, & l = 2, 4, \dots, 2J-4, 2J-2, \\ \frac{4}{3}, & l = 1, 3, \dots, 2J-3, 2J-1. \end{cases}$$

В разделе 3.6 проводится анализ этой разностной схемы. Доказываются утверждения:

**Теорема 11.** *Разностная схема (19) имеет единственное решение.*

**Теорема 12.** *Метод (19) сходится с порядком  $\tau + (\Delta\alpha)^4 + h^4$ .*

**Теорема 13.** *Разностная схема (19) безусловно устойчива.*

В разделе 3.7 проводятся результаты численных экспериментов по решению тестовых дробных уравнения диффузии, с нелинейным эффектом постоянного сосредоточенного запаздывания, вида (19) с помощью схемы (17). Изменяя шаг по времени и пространству, анализируем порядок сходимости в примерах. Численные эксперименты подтверждают теоретические выводы.

В разделе 3.8 проводятся результаты численных экспериментов по решению тестовых уравнения диффузии, распределенного по времени порядка, с нелинейным эффектом постоянного сосредоточенного запаздывания, вида (18) с помощью схемы (19). Изменяя шаг по

времени и пространству, а также шаг по распределенному порядку, анализируем порядок сходимости в примерах. Численные эксперименты подтверждают теоретические выводы.

Раздел 3.9 содержит некоторые выводы и заключения по численным схемам решения уравнения диффузии, сосредоточенного и распределенного по времени порядка, с нелинейным эффектом постоянного сосредоточенного запаздывания.

В главе 4 рассматриваются диффузионно-волновые уравнения с распределенной дробной производной по времени порядка от единицы до двух и производной по пространству второго порядка с наличием постоянного сосредоточенного запаздывания вида

$$\int_1^2 \omega(\alpha) \frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial t^\alpha} d\alpha = K \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + f(x, t, u(x, t), u(x, t - s)), \quad t > 0, \quad 0 \leq x \leq L, \quad (20)$$

со следующими начальными и граничными условиями

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \tilde{r}(x, t), \quad 0 \leq x \leq L, \quad t \in [-s, 0), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \tilde{\psi}(x), \\ u(0, t) &= \phi_0(t), \quad u(L, t) = \phi_L(t), \quad t > 0, \end{aligned}$$

где  $s > 0$ ,  $K > 0$  и  $\omega(\alpha) > 0$ . Дробная производная определена в смысле Капуто.

В разделе 4.1, кроме постановки задачи, проводится обзор работ, посвященных моделированию с помощью диффузионно-волновых уравнений дробного порядка, а также изучению численных методов их решения. Приводятся основные предположения.

В разделе 4.2 проводится вывод разностной схемы для уравнения (20). Для аппроксимации интеграла в (20) используется составная формула Симпсона с шагом разбиения  $\Delta\alpha = \frac{1}{2J}$ . Используя ту же методику, что и в разделе 3.5, а также обозначения главы 3, получаем разностную схему

$$\begin{aligned} & \Delta\alpha \sum_{l=0}^{2J} \gamma_l \omega(\alpha_l) \mathfrak{A} \left[ \frac{1}{\tau \Gamma(2 - \alpha_l)} \left( b_0^{\alpha_l} \delta_t v_i^{k-1/2} - \sum_{j=1}^{k-1} (b_{k-j-1}^{\alpha_l} - b_{k-j}^{\alpha_l}) \delta_t v_i^{j-1/2} - b_{k-1}^{\alpha_l} \psi(x_i) \right) \right] \\ &= K \delta_x^2 v_i^{k-1/2} + \mathfrak{A} f \left( x_i, t_{k-1/2}, \frac{3}{2} v_i^{k-1} - \frac{1}{2} v_i^{k-2}, \frac{1}{2} v_i^{k-n-1} + \frac{1}{2} v_i^{k-n} \right), \quad 1 \leq i \leq M-1, \quad 1 \leq k \leq N, \end{aligned} \quad (21)$$

с соответствующими начальными и граничными условиями.

В разделе 4.3 проводится анализ этой разностной схемы. Доказываются утверждения:

**Теорема 14.** *Разностная схема (21) имеет единственное решение.*

**Теорема 15.** *Метод (21) сходится с порядком  $\tau + (\Delta\alpha)^4 + h^4$ .*

**Теорема 16.** *Разностная схема (21) безусловно устойчива.*

В главе 5 рассматриваются численные методы решения уравнений адвекции-диффузии с дробными производными как по времени, так и по пространству, с эффектом наследственности:

$$\beta_1 \frac{\partial u}{\partial t} + \beta_2 \frac{\partial^\gamma u}{\partial t^\gamma} = -V \frac{\partial u}{\partial x} + D \left( \frac{1}{2} + \frac{q}{2} \right) \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} + D \left( \frac{1}{2} - \frac{q}{2} \right) \frac{\partial^\alpha u}{\partial (-x)^\alpha} +$$

$$+f(x, t, u(x, t), u_t(x, \cdot)), \quad (22)$$

где  $x \in [a, b]$ ,  $t \in [t_0, T]$ ,  $u_t(x, \cdot) = \{u(x, t + s), -\tau \leq s < 0\}$  — предыстория функции,  $\tau > 0$  — величина запаздывания,

с начальными условиями  $u(x, t) = \varphi(x, t)$ ,  $x \in [a, b]$ ,  $t \in [t_0 - \tau, t_0]$ ,

и граничными условиями  $u(a, t) = \varphi_1(t)$ ,  $u(b, t) = \varphi_2(t)$ ,  $t \in [t_0, T]$ .

Предположим, что  $\beta_1 = 1$ ,  $\beta_2 = \beta \geq 0$ ,  $-1 \leq q \leq 1$ ,  $V > 0$ ,  $D > 0$ ,  $1 < \alpha \leq 2$ ,  $0 < \gamma \leq 1$ .

Дробная производная по времени  $\frac{\partial^\gamma u}{\partial t^\gamma}$  определяется в смысле Капуто, левосторонняя  $\frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha}$  и правосторонняя  $\frac{\partial^\alpha u}{\partial (-x)^\alpha}$  дробные производные определяются в смысле Римана-Лиувилля.

Будем предполагать, что функционал  $f$ , функции  $\varphi(x, t)$ ,  $\varphi_1(t)$ ,  $\varphi_2(t)$ , и коэффициенты  $\beta$ ,  $q$ ,  $V$ ,  $D$  таковы, что задача (22) имеет единственное решение  $u(x, t)$ .

В разделе 5.1 проводится вывод разностной схемы. Пусть  $h = (b - a)/N$ ,  $\Delta = (T - t_0)/M$ ,  $\tau/\Delta = m$  целое. Введем точки разбиения  $x_i = a + ih$ ,  $i = 0, \dots, N$ , и  $t_j = t_0 + j\Delta$ ,  $j = 0, \dots, M$ . Будем обозначать через  $u_j^i$  приближения функции  $u(x_i, t_j)$  в узлах. Для каждого фиксированного  $i = 0, \dots, N$  введем дискретную предысторию к моменту времени  $t_j$ ,  $j = 0, \dots, M$ :  $\{u_k^i\}_j = \{u_k^i, j - m \leq k \leq j\}$ . Так как мы будем конструировать неявный метод первого порядка по времени, мы будем использовать кусочно-постоянную интерполяцию с экстраполяцией продолжением

$$v^i(t) = \begin{cases} u_{l-1}^i, & t_{l-1} \leq t < t_l, \quad 1 \leq l \leq j, \\ u_{j-1}^i, & t_j \leq t \leq t_j + \Delta, \\ \varphi(x_i, t), & t_0 - \tau \leq t \leq t_0. \end{cases}$$

Дискретизируем пространственные дробные производные Римана-Лиувилля с помощью сдвинутых формул Грюнвальда-Летникова

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} u(x_i, t_{k+1}) = \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{i+1} \omega_j^\alpha u(x_{i+1-j}, t_{k+1}) + O(h^p),$$

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial (-x)^\alpha} u(x_i, t_{k+1}) = \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{N-i+1} \omega_j^\alpha u(x_{i-1+j}, t_{k+1}) + O(h^p).$$

Коэффициенты  $\omega_j^\alpha$  определяются неоднозначно, положим

$$\omega_j^\alpha = (-1)^j \frac{\alpha(\alpha - 1) \cdots (\alpha - j + 1)}{j!}, \quad j = 0, 1, \dots,$$

тогда аппроксимации будут иметь порядок  $p = 1$ .

Дискретизируем дробную производную Капуто по времени используя  $L1$ -алгоритм

$$\frac{\partial^\gamma}{\partial t^\gamma} u(x, t_{k+1}) = \frac{1}{\Delta^\gamma \Gamma(2 - \gamma)} \sum_{j=0}^k b_j^\gamma [u(x, t_{k+1-j}) - u(x, t_{k-j})] + O(\Delta^{2-\gamma}),$$

где  $b_j^\gamma = (j + 1)^{1-\gamma} - j^{1-\gamma}$ ,  $j = 0, 1, \dots, M$ .

Используя также обычные формулы численного дифференцирования, получаем следующую неявную разностную схему

$$\begin{aligned} \frac{u_{k+1}^i - u_k^i}{\Delta} + \frac{\beta}{\Delta \Gamma(2-\gamma)} \sum_{j=0}^k b_j^\gamma [u_{k+1-j}^i - u_{k-j}^i] = -V \frac{u_{k+1}^i - u_{k+1}^{i-1}}{h} + \\ + \left(\frac{1}{2} + \frac{q}{2}\right) \frac{D}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{i+1} \omega_j^\alpha u_{k+1}^{i+1-j} + \left(\frac{1}{2} - \frac{q}{2}\right) \frac{D}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{N-i+1} \omega_j^\alpha u_{k+1}^{i-1+j} + f_{j+1}^i, \end{aligned} \quad (23)$$

$f_{j+1}^i = f(x_i, t_{j+1}, v^i(t_j + \Delta), v_{t_j+\Delta}^i(\cdot))$ . Схема дополняется начальными и граничными условиями. Схема переписывается в виде

$$\begin{aligned} \mu u_{k+1}^i - r_2 u_{k+1}^{i-1} - \frac{1+q}{2} r_3 \sum_{j=0, j \neq 1}^{i+1} \omega_j^\alpha u_{k+1}^{i+1-j} - \frac{1-q}{2} r_3 \sum_{j=0, j \neq 1}^{N-i+1} \omega_j^\alpha u_{k+1}^{i-1+j} = \\ u_{k+1}^i + \beta r_1 [b_k^\gamma u_0^i + \sum_{j=0}^{k-1} (b_j^\gamma - b_{j+1}^\gamma) u_{k-j}^i] + \Delta f_{j+1}^i. \end{aligned} \quad (24)$$

где  $r_1 = \Delta^{1-\gamma}/\Gamma(2-\gamma)$ ,  $r_2 = V\Delta/h$ ,  $r_3 = D\Delta/h^\alpha$ ,  $\mu = 1 + \beta r_1 + r_2 + \alpha r_3$ . Доказывается, что эта система однозначно разрешима.

В разделе 5.2 проводится анализ погрешности аппроксимации (невязки) метода. Доказывается, что при определенных условиях гладкости решения (точное решение  $u(x, t)$  дважды непрерывно дифференцируемо по  $t$  и по  $x$ , а также дробные производные  $\frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha}$  и  $\frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial (-x)^\alpha}$  непрерывно дифференцируемы по  $t$  и по  $x$ ) невязка без интерполяции и невязка с кусочно-постоянной интерполяцией имеют порядок  $\Delta + h$ . В разделе 5.3 доказывается сходимость метода.

Пусть  $\varepsilon_j^i = u(x_i, t_j) - u_j^i$  погрешность метода в узлах. Определим для каждого временного слоя с номером  $j = 0, 1, \dots, M$  послойную погрешность — вектор  $\varepsilon_j = (\varepsilon_j^1, \varepsilon_j^2, \dots, \varepsilon_j^{N-1})$  с нормой  $\|\varepsilon_j\| = \max_{1 \leq i \leq N-1} |\varepsilon_j^i|$ . Кроме того, определим накопившуюся предысторию послойной погрешности к моменту  $t_j$ ,  $j = 0, 1, \dots, M$ :

$\{\varepsilon_k\}_j = \{\varepsilon_k, 0 \leq k \leq j\}$  с нормой  $\|\{\varepsilon_k\}_j\| = \max_{0 \leq k \leq j} \|\varepsilon_k\|$ .

**Лемма 34.** Пусть  $|\varepsilon_{k+1}^{i_0}| = \max_{1 \leq i \leq N-1} |\varepsilon_{k+1}^i|$ , тогда

$$(1 + \beta r_1) \|\varepsilon_{k+1}\| \leq |\varepsilon_k^{i_0} + \beta r_1 [b_k^\gamma \varepsilon_0^{i_0} + \sum_{j=0}^{k-i} (b_j^\gamma - b_{j+1}^\gamma) \varepsilon_{k-j}^{i_0}] + \Delta \check{f}_{k+1}^{i_0} - \Delta f_{k+1}^{i_0} + \Delta \nu_k^{i_0}|.$$

В следующем утверждении проводится оценка накопившейся предыстории послойной погрешности к моменту  $t_{k+1}$  через накопившуюся предысторию послойной погрешности к моменту  $t_k$ .

**Лемма 35.** Предположим, что точное решение  $u(x, t)$  дважды непрерывно дифференцируемо по  $t$  и по  $x$ , а также дробные производные  $\frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha}$  и  $\frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial (-x)^\alpha}$  непрерывно дифференцируемы

по  $t$  и по  $x$ , тогда справедлива оценка

$$\|\{\varepsilon_j\}_{k+1}\| \leq (1 + (L + K)\Delta)\|\{\varepsilon_j\}_k\| + C_2\Delta(h + \Delta).$$

**Теорема 17.** Пусть точное решение  $u(x, t)$  уравнения (22) является достаточно гладким, т.е. выполнено предположение Леммы 31, тогда метод (24) сходится с порядком  $h + \Delta$ .

В разделе 5.4 приведены результаты численных экспериментов на тестовом примере для уравнений адвекции-диффузии с дробными производными по времени и пространству и с эффектом переменного запаздывания по времени. В примере имеется точное решение, поэтому сравнивая приближенные решения с точным, можно отследить изменение погрешностей при изменении пространственных и временных шагов. Численные эксперименты показали хорошее соответствие с теоретическими результатами.

В последнем разделе главы 5 приводятся некоторые выводы и заключения по анализу неявного метода для дробного по пространству и времени уравнения адвекции-диффузии с функциональным запаздыванием по времени.

**Апробация работы.** Основные результаты докладывались и обсуждались на следующих научных мероприятиях:

- семинары кафедры вычислительной математики Института математики и компьютерных наук Уральского федерального университета;
- международная конференция «Алгоритмический анализ неустойчивых задач», посвященная памяти В.К. Иванова (Челябинск, 2014);
- международные (46-я, 47-я) молодежные школы-конференции «Современные проблемы математики и ее приложений» (Екатеринбург, 2015, 2016);
- всероссийская конференция с международным участием «Теория управления и математическое моделирование», посвященная памяти профессора Н.В. Азбелева и профессора Е.Л. Тонкова (Ижевск, 2015);
- 15th International Conference on Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering (Rota, Spain, 2015);
- международная конференция «Колмогоровские чтения - VII. Общие проблемы управления и их приложения» (Тамбов, 2015);
- семинары департамента математического анализа Гентского университета (Гент, Бельгия, 2016);
- международная конференция «Экспериментальная и компьютерная биомедицина» памяти члена-корреспондента РАН В.С. Мархасина (Екатеринбург, 2016);
- Sixth Conference on Numerical Analysis and Applications (Lozenetz, Bulgaria, 2016);

— международная конференция «Системный анализ: моделирование и управление», посвященная памяти академика А.В. Кряжимского (Екатеринбург, 2016);

— международная научная конференция «Актуальные проблемы прикладной математики и информатики», приуроченная к 25-летию Института прикладной математики и автоматизации (Нальчик, 2016).

**Публикации.** Основные результаты диссертации опубликованы в работах [179–191]. Работы [182, 183, 185, 189] опубликованы в журналах, входящих в перечень ВАК. В совместных работах [179, 180, 182–191] научному руководителю принадлежат постановки задач и общие методики исследования, а диссертанту — разработка численных методов, доказательства основных теорем и компьютерное тестирование созданных алгоритмов на примерах. В работе [185] R.H. De Staelen провел доказательство теоремы о сходимости численного метода для системы с дробным распределенным порядком.

**Благодарности.** Я благодарен своему научному руководителю, доктору физико-математических наук, профессору Владимиру Германовичу Пименову за его непрерывную помощь и поддержку. Я также хотел бы воспользоваться возможностью, чтобы поблагодарить всех коллег и друзей с кафедры вычислительной математики Уральского федерального университета за обеспечения дружественной и стимулирующей рабочей обстановки. Кроме того, я хотел бы благодарить свою жену и свою дочь за их терпение и поддержку во время моих исследования и написания диссертации. Наконец, я хотел бы выразить свои особые благодарности всем членам моей семьи и родственникам за их непрерывную поддержку, особенно моей маме, которая проявила много усилий, чтобы помочь мне достигнуть своих научных целей.

# Глава 1

## Схемы BDF-типа сдвинутой Чебышевской аппроксимации для дробных дифференциальных уравнений с запаздыванием

Эта глава посвящена изучению нового метода BDF-типа (BDF — формулы дифференцирования назад), основанного на сдвинутом разложении Чебышева, аппроксимирующем решения начальных задач для дробных дифференциальных уравнений (FDE) и дробных дифференциальных уравнений с запаздыванием (FDDE). Рассмотрим уравнение

$$D^{(\beta)}y(t) = f(t, y(t), y(t - \tau)), \quad t \in [0, L], \quad 0 < \beta \leq 1, \quad (1.1)$$

с начальным условием

$$y(t) = \phi(t), \quad t \in [-\tau, 0], \quad (1.2)$$

где запаздывание  $\tau > 0$  может быть постоянным или переменным относительно  $t$ . Дробный дифференциальный оператор Капуто  $D^{(\beta)}$  порядка  $\beta$  определяется следующей формулой [66]:

$$D^{(\beta)}f(x) = \frac{1}{\Gamma(m - \beta)} \int_0^x \frac{f^{(m)}(\xi)}{(x - \xi)^{\beta - m + 1}} d\xi, \quad \beta > 0,$$

где  $m - 1 < \beta \leq m$ ,  $m \in \mathbb{N}$ ,  $x > 0$ .

### 1.1 Введение

Отметим, что FDDE сводится к FDE, если  $\tau = 0$ . Дробные дифференциальные уравнения являются активной областью исследования вследствие интенсивной разработки как самой

теории дробного исчисления, так и применений в различных областях науки, таких как физика [134], химия [68], инженерия [129, 144], автоматическое управление [54, 115, 157] и т.д. Введение временного запаздывания в правой части дробного дифференциального уравнения, также как и дробность уравнения, влечет за собой добавление памяти в состояние решения уравнения. Путем включения как дробных производных, так и запаздывания на конечных промежутках времени для некоторых моделей (со свойствами памяти и наследия) [48], более полные и реалистические свойства модели могут быть установлены. Machado [160] предложил вычисление дробных дифференциальных уравнений на основе систем с временной задержкой. В этой работе были проанализированы свойства памяти дробных операторов и их соотношения с величиной временного запаздывания. Эффект запаздывания хаотического поведения решений в дробных системах Лю был исследован в [46]. Дробная финансовая система с запаздыванием была предложена в работе [163] и её сложное динамическое поведение было исследовано путем численного моделирования. За последние несколько лет многие исследователи изучили проблемы существования решений для дробных дифференциальных уравнений. В частности, существование, единственность и структурная устойчивость решений нелинейных дифференциальных уравнений дробного порядка были изучены в книге Diethelm и Ford [66]. Теоремы существования и единственности для начальной задачи системы дробных дифференциальных уравнений были предложены в работе Gejji и Babakhani [59]. Анализ дробных уравнений с запаздыванием появился в некоторых реальных системах. В работе [41] вопросы существования решения для начальной задачи дифференциального уравнения с дробной производной Римана–Лиувилля порядка  $0 < \alpha < 1$  и с бесконечным запаздыванием были изучены с применением теоремы Банаха о неподвижной точке и нелинейной её альтернативой типа Лере, Шаудера и др. В этой работе также обсуждались те же вопросы для уравнений нейтрального типа с дробной производной. Подобные вопросы также изучались Deng и Qu [63], а также в [41], где также получены некоторые результаты, касающиеся единственности решения. Zhou и другие [177] рассматривали начальную задачу для дробных дифференциальных уравнений нейтрального типа с бесконечным запаздыванием и производной Капуто, используя теорему о неподвижной точке. Agarwal и др. [25] рассматривали подобные проблемы для дробных в смысле Капуто уравнений нейтрального типа с ограниченным запаздыванием. Позже Yang и другие [169] получили условия глобального существования и единственности решения начальных задач для нелинейных дробных фракционных уравнения с запаздыванием путем использования теорем о неподвижной точке в пространстве абсолютно непрерывных функций.

Численные методы для решения таких задач, которые содержат и дробные производные и запаздывания по времени, значительно менее развиты. В этом отношении отметим работу



Wang [164], в которой для уравнения дробного порядка с запаздыванием было построена комбинация общего метода Адамса–Бешфорда–Мултона с методом линейной интерполяции. Wang и другие [164], основываясь на определении Грюнвальда–Летникова, также ввели численный метод для нелинейного дробного уравнения с постоянным запаздыванием. Morgado и другие [130] изучали численно специальную форму линейного дробного дифференциального уравнения с конечным запаздыванием путем адаптации дробной разностной формулы дифференцирования назад. Новый метод типа предиктор–корректор был разработан для решения дробных уравнений с запаздыванием в [60], в этой работе также был представлен анализ погрешностей. Vhrawu и другие [49] предложили точный и робастный метод аппроксимации решения функциональной граничной задачи Дирихле для некоторых типов уравнений переменного дробного порядка Капуто. Эффективная численная схема для дробной функциональной задачи переменного порядка была предложена в [91]. Метод, который обобщает конечно-разностный метод для некоторого класса дробных дифференциальных уравнений с запаздыванием был предложен в [128].

В нашем подходе мы рассматриваем **BDF** схемы, основанные на аппроксимациях Clenshaw и Curtis [55]. Мы не используем приближение  $f$  функции в правой части дробного дифференциального уравнения, но мы используем усеченный ряд Чебышева вместо этого. Рассмотрим известные полиномы Чебышева  $T_n(x)$  [120], определенные на отрезке  $[-1, 1]$ . Для того, чтобы использовать эти полиномы на отрезке  $[0, L]$ , мы определим так называемые сдвинутые полиномы Чебышева путем введения переменной  $z = \frac{2x}{L} - 1$ . Сдвинутые полиномы Чебышева определяются как

$$T_n^*(x) = T_n\left(\frac{2x}{L} - 1\right), \text{ где } T_0^*(x) = 1, \quad T_1^*(x) = \frac{2x}{L} - 1.$$

Аналитическая форма для сдвинутых полиномов Чебышева  $T_n^*(x)$  степени  $n$  приведена в [120]:

$$T_n^*(x) = n \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \frac{(n+k-1)! 2^{2k}}{(n-k)!(2k)! L^k} x^k, \quad (1.3)$$

где  $T_n^*(0) = (-1)^n$ ,  $T_n^*(L) = 1$ . Условия ортогональности этих полиномов означает, что

$$\int_0^L T_j^*(x) T_k^*(x) w(x) dx = \delta_{jk} h_k, \quad (1.4)$$

где весовая функция  $w(x) = \frac{1}{\sqrt{Lx-x^2}}$ ,  $h_k = \frac{b_k}{2} \pi$ , с  $b_0 = 2$ ,  $b_k = 1$ ,  $k \geq 1$ .

Функция  $y(x)$ , которая принадлежит пространству интегрируемых с квадратом функций на  $[0, L]$ , может быть представлена в терминах сдвинутых многочленов Чебышева как

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n T_n^*(x),$$

где коэффициенты  $c_n$  определяются как

$$c_n = \frac{1}{h_n} \int_0^L y(x) T_n^*(x) w(x) dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.5)$$

Clenshaw и Curtis [55] ввели аппроксимацию функций  $y(x)$ , используя представление обозначения для представление разложения по сдвинутым Чебышевским полиномам

$$y_N(x) = \sum_{n=0}^N {}'' a_n T_n^*(x), \quad a_n = \frac{2}{N} \sum_{r=0}^N {}'' y(x_r) T_n^*(x_r). \quad (1.6)$$

Символ суммы с двумя штрихами означает сумму с первым и последним членом, разделенными на 2. Точки сетки (точки интерполяции  $x_r$ ) выбираются как точки Чебышева–Гаусса–Лобатто на интервале  $[0, L]$ :  $x_r = \frac{L}{2} - \frac{L}{2} \cos(\frac{\pi r}{N})$ ,  $r = 0, 1, \dots, N$ .

Это представление решения в виде интерполяционных полиномов, которые проходят через определенные точки, называемые узлами интерполяции, и представляет собой **BDF**-методы, метод также включает вычисление значений функции  $f$  в этих точках. Структура этой главы устроена следующим образом: в этом, первом разделе главы мы представили определение сдвинутых полиномов Чебышева и их аналитической формулы. Во втором разделе проводится вывод разностного метода. Далее предложенный метод представляется как одношаговая рекуррентная формула. В третьем разделе изучается локальная погрешность и глобальная погрешность метода. Четвертый раздел главы посвящен рассмотрению численных примеров, в конце главы краткое заключение.

## 1.2 Вывод разностного метода

Рассмотрим начальную задачу (1.1-1.2) дробного порядка с запаздыванием. Численное решение будем строить в в точках  $t_{s+1} = t_s + h$ , таких, что  $h > 0$  — переменная величина шага. Перепишем решение  $y(t)$  на промежутке  $[t_s, t_{s+1}]$  в терминах новой переменной  $\alpha$  определенной как

$$t = t_s + \frac{h\alpha}{L}, \quad \alpha \in [0, L].$$

Тогда, решение FDDE может быть выражено в виде

$$y(t) = y\left(t_s + \frac{h\alpha}{L}\right) = \bar{y}(\alpha). \quad (1.7)$$

Используем аппроксимацию Clenshaw и Curtis (1.7) конечными суммами

$$\bar{y}(\alpha) = \sum_{n=0}^N {}'' a_n T_n^*(\alpha), \quad a_n = \frac{2}{N} \sum_{r=0}^N {}'' y(t_s + \zeta_r h) T_n^*(\alpha_r), \quad (1.8)$$

где

$$\zeta_r = \frac{\alpha_r}{L}, \quad \alpha_r = \frac{L}{2} - \frac{L}{2} \cos\left(\frac{\pi r}{N}\right).$$

$$D_t^{(\beta)} \bar{y}(\alpha) = \frac{2}{N} \sum_{n=0}^N \sum_{r=0}^N y(t_s + \zeta_r h) T_n^*(\alpha_r) D_t^{(\beta)} T_n^*(\alpha(t)). \quad (1.9)$$

Используя аналитическую форму сдвинутых полиномов Чебышева (1.3) и свойства дробных производных Капуто, получаем

$$D_t^{(\beta)} T_n^*(\alpha(t)) = \sum_{k=0}^n \frac{n(-1)^{(n-k)} 2^{(2k)} (n+k-1)!}{(n-k)!(2k)! L^k} D_t^{(\beta)} \left( \left( \frac{L}{h} t - \frac{L}{h} t_s \right)^k \right), \quad (1.10)$$

$$= \sum_{k=\lceil \beta \rceil}^n \frac{n(-1)^{(n-k)} 2^{(2k)} (n+k-1)! \Gamma(k+1) L^\beta}{(n-k)!(2k)! L^k \Gamma(k+1-\beta) h^\beta} \alpha^{k-\beta}. \quad (1.11)$$

Далее,  $\alpha^{k-\beta}$  может быть аппроксимировано суммой сдвинутых полиномов Чебышева

$$\alpha^{k-\beta} \cong \sum_{j=0}^N c_{kj} T_j^*(\alpha), \quad (1.12)$$

где  $c_{kj}$  получается из (1.5), как пояснено в [69],

$$c_{kj} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{L^{k-\beta} \Gamma(k-\beta+\frac{1}{2})}{\Gamma(k-\beta+1)}, & \text{для } j=0; \\ \frac{j L^{k-\beta}}{\sqrt{\pi}} \sum_{r=0}^j \frac{(-1)^{j-r} (j+r-1)! 2^{2r+1} \Gamma(k+r-\beta+\frac{1}{2})}{(j-r)!(2r)! \Gamma(k+r-\beta+1)}, & \text{для } j=1, 2, \dots \end{cases} \quad (1.13)$$

Из соотношений (1.11-1.13) мы получаем

$$D_t^{(\beta)} T_n^*(\alpha(t)) = \frac{1}{h^\beta} \sum_{j=0}^{\infty} \omega_\beta(n, j) T_j^*(\alpha), \quad n = \lceil \beta \rceil, \lceil \beta \rceil + 1, \dots, \quad (1.14)$$

где  $\omega_\beta(n, j) = \sum_{k=\lceil \beta \rceil}^n \psi_{n,j,k}$ ,

$$\psi_{n,j,k} = \begin{cases} \frac{n(-1)^{n-k} (n+k-1)! 2^{2k} k! \Gamma(k-\beta+\frac{1}{2})}{L^\beta (n-k)!(2k)! \sqrt{\pi} \Gamma(k-\beta+1)^2}, & \text{для } j=0; \\ \frac{(-1)^{n-k} n j (n+k-1)! 2^{2k+1} k!}{L^\beta (n-k)!(2k)! \Gamma(k-\beta+1) \sqrt{\pi}} \sum_{r=0}^j \frac{(-1)^{j-r} (j+k-1)! 2^{2r} \Gamma(k+r-\beta+\frac{1}{2})}{(j-r)!(2r)! \Gamma(k+r-\beta+1)}, & \text{для } j=1, 2, \dots \end{cases} \quad (1.15)$$

Тогда  $\psi_{n,j,k}$  может быть представлено в следующем виде

$$\psi_{n,j,k} = \frac{(-1)^{n-k} 2n(n+k-1)! \Gamma(k-\beta+\frac{1}{2})}{b_j L^\beta \Gamma(k+\frac{1}{2})(n-k)! \Gamma(k-\beta-j+1) \Gamma(k+j-\beta+1)}, \quad j=0, 1, \dots, \quad (1.16)$$

Тогда

$$D_t^{(\beta)} T_n^*(\alpha(t)) = \frac{1}{h^\beta} \sum_{j=0}^N \sum_{k=\lceil \beta \rceil}^n \frac{(-1)^{(n-k)} 2n(n+k-1)! \Gamma(k-\beta+\frac{1}{2})}{b_j \Gamma(k+\frac{1}{2})(n-k)! \Gamma(k-\beta-j+1) \Gamma(k-\beta-j+1)} T_j^*(\alpha) \quad (1.17)$$

Из соотношений (1.8) и (1.17) мы получаем следующее приближенное соотношение

$$f(t, y(t), y(t-\tau)) = \frac{4}{N h^\beta} \sum_{n=\lceil \beta \rceil}^N \sum_{r=0}^N \sum_{j=0}^N \sum_{k=\lceil \beta \rceil}^n \frac{(-1)^{(n-k)} n(n+k-1)! \Gamma(k-\beta+\frac{1}{2}) y(t_s + \zeta_r h) T_n^*(\alpha_r)}{b_j \Gamma(k+\frac{1}{2})(n-k)! \Gamma(k-\beta-j+1) \Gamma(k-\beta-j+1)} T_j^*(\alpha). \quad (1.18)$$

Применение формулы (1.18) в  $\alpha_\ell = \frac{L}{2} - \frac{L}{2} \cos(\frac{\pi\ell}{N})$ ,  $\ell = 1, 2, \dots, N$  дает неявную систему алгебраических уравнений

$$f(t_s + \zeta_\ell h, y(t_s + \zeta_\ell h), y(t_s + \zeta_\ell h - \tau)) = \quad (1.19)$$

$$\frac{4}{Nh^\beta} \sum_{n=\lceil\beta\rceil}^N \text{''} \sum_{r=0}^N \text{''} \sum_{j=0}^N \sum_{k=\lceil\beta\rceil}^n \frac{(-1)^{(n-k)} n(n+k-1) \Gamma(k-\beta+\frac{1}{2}) y(t_s + \zeta_r h) T_n^*(\alpha_r)}{b_j \Gamma(k+\frac{1}{2})(n-k)! \Gamma(k-\beta+j+1) \Gamma(k-\beta-j+1)} T_j^*(\alpha_\ell).$$

Заметим, что так как запаздывание  $\tau$  произвольно, в том числе и переменное, величина  $(t_s + \zeta_\ell h - \tau)$  может оказаться не в узлах сетки  $t_\ell$  для некоторых  $\ell$ . Поэтому мы устанавливаем приближение для функции с запаздывающим аргументом  $y(t - \tau)$  следующим образом

$$d_\ell = y(t_\ell - \tau(t_\ell)) = y(t_s + \zeta_\ell h - \tau(t_s + \zeta_\ell h)).$$

Мы определим величину  $\delta_\ell$ , связанную с запаздыванием  $\tau$ :  $\tau = (m_s + \delta_\ell)h$  таким образом, что  $0 \leq \delta_\ell < 1$ , где  $m_s$  — положительное целое, тогда  $d_\ell = y(t_0 + (s - m_s)h + (\zeta_\ell - \delta_\ell)h)$ .

Рассмотрим два различных случая :

**1-ый случай** ( $\delta_\ell = 0$ )

$$d_\ell = \begin{cases} y(t_{s-m_s} + \zeta_\ell h), & \text{для } s > m_s; \\ \Lambda_\ell, & \text{для } s \leq m_s. \end{cases} \quad (1.20)$$

Таким образом,

$$\Lambda_\ell = \begin{cases} y(t_0 + \zeta_\ell h), & \text{для } s = m_s; \\ y(t_0), & \text{для } s + \zeta_\ell = m_s; \\ \phi(t_\ell - \tau(t_\ell)), & \text{для } s + \zeta_\ell < m_s. \end{cases} \quad (1.21)$$

**2-ой случай** ( $0 < \delta_\ell < 1$ )

В этом случае  $y(t - \tau)$  не в точке сетки. Поэтому мы интерполируем по двум ближайшим точкам

$$\begin{aligned} d_\ell &= y(t_0 + (s - m_s - 1)h + \zeta_\ell h - (1 - \delta_\ell)h), \\ &= y\left((t_{s-m_s-1} + \zeta_\ell h) + (1 - \delta_\ell)h\right), \\ &= y(t_{s-m_s-1} + \zeta_\ell h) + (1 - \delta_\ell)h y'(t_{s-m_s-1} + \zeta_\ell h) + O(h^2), \\ &\simeq y(t_{s-m_s-1} + \zeta_\ell h) + (1 - \delta_\ell)h \left[ \frac{y(t_{s-m_s-1} + \zeta_\ell h + h) - y(t_{s-m_s-1} + \zeta_\ell h)}{h} \right], \\ &\simeq (1 - \delta_\ell)y(t_{s-m_s} + \zeta_\ell h) + \delta_\ell y(t_{s-m_s-1} + \zeta_\ell h). \end{aligned}$$

Поэтому мы получаем

$$d_\ell = \begin{cases} (1 - \delta_\ell)y(t_{s-m_s} + \zeta_\ell h) + \delta_\ell y(t_{s-m_s-1} + \zeta_\ell h), & \text{для } s > m_s; \\ (1 - \delta_\ell)y(t_0 + \zeta_\ell h) + \delta_\ell \phi(t_\ell - \tau(t_\ell)), & \text{для } s = m_s; \\ \hbar_\ell, & \text{для } s < m_s. \end{cases} \quad (1.22)$$

Таким образом,

$$\tilde{h}_\ell = \begin{cases} (1 - \delta_\ell)y(t_0) + \delta_\ell\phi(t_\ell - \tau(t_\ell)), & \text{для } s + \zeta_\ell = m_s; \\ \phi(t_\ell - \tau(t_\ell)), & \text{для } s + \zeta_\ell < m_s. \end{cases} \quad (1.23)$$

Используя соотношения (1.19)-(1.23) и вводя сокращенное обозначение  $\mathbf{f}_\ell := f(t_s + \zeta_\ell h, y(t_s + \zeta_\ell h), d_\ell)$ , мы получаем окончательный вид нашего метода

$$h^\beta \mathbf{f}_\ell = \frac{4}{N} \sum_{n=\lceil\beta\rceil}^N \sum_{r=0}^N \sum_{j=0}^N \sum_{k=\lceil\beta\rceil}^n \frac{(-1)^{(n-k)} n(n+k-1)! \Gamma(k-\beta+\frac{1}{2}) y(t_s + \zeta_r h) T_n^*(\alpha_r)}{b_j \Gamma(k+\frac{1}{2})(n-k)! \Gamma(k-\beta+j+1) \Gamma(k-\beta-j+1)} T_j^*(\alpha_\ell), \quad (1.24)$$

где неизвестными являются значение решения в промежуточных точках  $y(t_s + \zeta_\ell h)$ .

Например, алгебраическая система (1.24) при  $\beta = 1$  и  $N = 4$  переходит в систему следующих четырех уравнений:

$$\begin{aligned} h\mathbf{f}_1 &= -(2 + \sqrt{2})y(t_s) + \sqrt{2}y(t_s + \zeta_1 h) + 2\sqrt{2}y(t_s + \zeta_2 h) - \sqrt{2}y(t_s + \zeta_3 h) + (2 - \sqrt{2})y(t_s + \zeta_4 h), \\ h\mathbf{f}_2 &= 1y(t_s) - 2\sqrt{2}y(t_s + \zeta_1 h) + 0y(t_s + \zeta_2 h) + 2\sqrt{2}y(t_s + \zeta_3 h) - 1y(t_s + \zeta_4 h), \\ h\mathbf{f}_3 &= -(2 - \sqrt{2})y(t_s) + \sqrt{2}y(t_s + \zeta_1 h) - 2\sqrt{2}y(t_s + \zeta_2 h) - \sqrt{2}y(t_s + \zeta_3 h) + (2 + \sqrt{2})y(t_s + \zeta_4 h), \\ h\mathbf{f}_4 &= 1y(t_s) - (8 - 4\sqrt{2})y(t_s + \zeta_1 h) + 4y(t_s + \zeta_2 h) - (8 + 4\sqrt{2})y(t_s + \zeta_3 h) + 11y(t_s + \zeta_4 h). \end{aligned}$$

Аналогично, алгебраическая система (1.24) при  $\beta = \frac{1}{2}$  и  $N = 4$  дает следующие четыре уравнения:

$$\begin{aligned} h^{1/2}\mathbf{f}_1 &= -(\sqrt{2}(335 + 182\sqrt{2})a)y(t_s) + ((280 + 320\sqrt{2})a)y(t_s + \zeta_1 h) - (12\sqrt{2}(1 - 7\sqrt{2})a)y(t_s + \zeta_2 h) \\ &\quad - ((56 + 16\sqrt{2})a)y(t_s + \zeta_3 h) + ((-28 + 43\sqrt{2})a)y(t_s + \zeta_4 h), \\ h^{1/2}\mathbf{f}_2 &= -(71\sqrt{2}/d)y(t_s) - ((168 + 40\sqrt{2})/d)y(t_s + \zeta_1 h) + (180\sqrt{2}/d)y(t_s + \zeta_2 h) \\ &\quad + ((168 - 40\sqrt{2})/d)y(t_s + \zeta_3 h) - ((29\sqrt{2})/d)8y(t_s + \zeta_4 h), \\ h^{1/2}\mathbf{f}_3 &= -(\sqrt{2}(335 - 182\sqrt{2})b)y(t_s) + ((56 - 16\sqrt{2})b)y(t_s + \zeta_1 h) - (12\sqrt{2}(1 + 7\sqrt{2})b)y(t_s + \zeta_2 h) \\ &\quad + (-280 + 320\sqrt{2})by(t_s + \zeta_3 h) + ((28 + 43\sqrt{2})b)y(t_s + \zeta_4 h), \\ h^{1/2}\mathbf{f}_4 &= -(43\sqrt{2}c)y(t_s) + ((168 - 152\sqrt{2})c)y(t_s + \zeta_1 h) + (12\sqrt{2}c)y(t_s + \zeta_2 h) \\ &\quad - ((168 + 152\sqrt{2})c)y(t_s + \zeta_3 h) + 335\sqrt{2}cy(t_s + \zeta_4 h). \end{aligned}$$

где

$$a = \frac{1}{105} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin\left(\frac{\pi}{8}\right), \quad b = \frac{1}{105} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos\left(\frac{\pi}{8}\right), \quad c = \frac{1}{105} \sqrt{\frac{2}{\pi}}, \quad d = 105\sqrt{\pi}.$$

Решая эту систему, например, с помощью системы аналитических вычислений МАТНЕМАТИСА, получаем, в частности, требуемое значение в конечной точке отрезка  $y(t_s + \zeta_4 h) = y(t_s + h) = y_{s+1}$ . Если мы повторим эту процедуру вдоль всего отрезка интегрирования  $[0, L]$ , мы получим приближенное решение задачи (1.1-1.2).

### 1.3 Детальный анализ погрешности предложенного метода

В этом разделе анализируется локальная и глобальная погрешности метода. Перепишем метод (1.24) при  $N = 4$  в виде одношаговой рекуррентной формулы

$$CY_s = BY_{s-1} + h^\beta F_s, \quad (1.25)$$

где

$$F_s = [\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3, \mathbf{f}_4]^T, \quad Y_s = [y(t_s + \zeta_1 h), y(t_s + \zeta_2 h), y(t_s + \zeta_3 h), y(t_s + \zeta_4 h)]^T, \\ Y_{s-1} = [y(t_{s-1} + \zeta_1 h), y(t_{s-1} + \zeta_2 h), y(t_{s-1} + \zeta_3 h), y(t_{s-1} + \zeta_4 h)]^T.$$

**Лемма 1.** *Справедливо*

$$y(t_s - \zeta_{4-\ell} h) = y(t_{s-1} + \zeta_\ell h), \quad \ell = 1, 2, 3, 4, \quad (1.26)$$

$$Y_{s-1} = [y(t_s + \zeta_3 h), y(t_s + \zeta_2 h), y(t_s + \zeta_1 h), y(t_s + \zeta_0 h)]^T.$$

В частности, если  $\beta = 1$ , постоянные матрицы  $B$  и  $C$  даются формулами

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 + \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 - \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 2\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 2 - \sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 0 & 2\sqrt{2} & -1 \\ \sqrt{2} & -2\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 2 + \sqrt{2} \\ -8 + 4\sqrt{2} & 4 & -8 - 4\sqrt{2} & 11 \end{pmatrix}.$$

Эти формулы полностью совпадают с результатами, полученными Ramos и Vigo-Aguiar [140].

Для  $\beta = 1/2$  постоянные матрицы  $B$  и  $C$  могут быть записаны как

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}(335 + 182\sqrt{2})a \\ 0 & 0 & 0 & 71\sqrt{2}/d \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}(335 - 182\sqrt{2})b \\ 0 & 0 & 0 & 43\sqrt{2}c \end{pmatrix}, \\ C = \begin{pmatrix} (280 + 320\sqrt{2})a & -12\sqrt{2}(1 - 7\sqrt{2})a & -(56 + 16\sqrt{2})a & (-28 + 43\sqrt{2})a \\ (-168 - 40\sqrt{2})/d & 180\sqrt{2}/d & (168 - 40\sqrt{2})/d & (-29\sqrt{2})/d \\ (56 - 16\sqrt{2})b & -12\sqrt{2}(1 + 7\sqrt{2})b & (-280 + 320\sqrt{2})b & (28 + 43\sqrt{2})b \\ (168 - 152\sqrt{2})c & 12\sqrt{2}c & (-168 - 152\sqrt{2})c & 335\sqrt{2}c \end{pmatrix},$$

Так как матрица  $C$  невырожденная, умножая формулу (1.25) на обратную матрицу  $C^{-1}$ , получаем

$$Y_s = C^{-1}BY_{s-1} + h^\beta C^{-1}F_s, \quad (1.27)$$

**Лемма 2.** Результат произведения  $C^{-1}B$  представляет собой квадратную матрицу раз-

мерности  $4 \times 4$  следующего вида 
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Лемма 3.** Метод (1.27) при  $\beta = 1$  может рассматриваться как метод Рунге-Кутты с таблицей Бутчера [50]

|            |                                  |                                  |                                  |                 |
|------------|----------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|-----------------|
| $\alpha_1$ | $\frac{1}{384}(88 - 4\sqrt{2})$  | $\frac{1}{384}(40 - 64\sqrt{2})$ | $\frac{1}{384}(88 - 28\sqrt{2})$ | $-\frac{1}{16}$ |
| $\alpha_2$ | $\frac{1}{384}(64 + 48\sqrt{2})$ | $\frac{1}{6}$                    | $\frac{1}{384}(64 - 48\sqrt{2})$ | $0$             |
| $\alpha_3$ | $\frac{1}{384}(88 + 28\sqrt{2})$ | $\frac{1}{384}(40 + 64\sqrt{2})$ | $\frac{1}{384}(88 + 4\sqrt{2})$  | $-\frac{1}{16}$ |
| $\alpha_4$ | $\frac{1}{3}$                    | $\frac{1}{3}$                    | $\frac{1}{3}$                    | $0$             |
|            | $\frac{1}{3}$                    | $\frac{1}{3}$                    | $\frac{1}{3}$                    | $0$             |

что полностью согласуется с таблицей, полученной Ramos и Aguiar [140].

Рассмотрим разностные операторы, связанные с каждой стадией нашего метода

$$L_i(y(t), h) = y(t_s + \zeta_i h) - y(t_s) - h^\beta \sum_{j=1}^4 c_{ij} D^{(\beta)} y(t_s + \zeta_j h), \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad (1.28)$$

$$L_i(y(t), h) = y(t_s + \zeta_i h) - y(t_s) - h^\beta \left( \sum_{j=1}^4 c_{ij} f(t_s + \zeta_j h, y(t_s + \zeta_j h), d_i) + O(h^2) \right), \quad (1.29)$$

После разложения  $y(t_s + \zeta_i h)$  and  $D^{(\beta)} y(t_s + \zeta_i h)$  в дробный ряд Тейлора в  $t_s$

$$\begin{aligned} y(t_s + \zeta_i h) &= y(t_s) + D^{(\beta)} y(t_s) \frac{(\zeta_i h)^\beta}{\Gamma(\beta + 1)} + D^{(2\beta)} y(t_s) \frac{(\zeta_i h)^{2\beta}}{\Gamma(2\beta + 1)} + \dots \\ &\quad + D^{(5\beta)} y(t_s + \theta \zeta_i h) \frac{(\zeta_i h)^{5\beta}}{\Gamma(5\beta + 1)}, \end{aligned} \quad (1.30)$$

и рассматривая два различных случая для запаздывания, мы получаем:

**1-ый случай** ( $\delta_\ell = 0$ ):

$$L_i(y(t), h) = O(h^{5\beta}), \quad (1.31)$$

**2-ой случай** ( $0 < \delta_\ell < 1$ ):

$$L_i(y(t), h) = O(h^q), \quad q = \min(5\beta, \beta + 2). \quad (1.32)$$

Теперь, мы собираемся вычислить глобальную погрешность. Начнем со следующего утверждения, которое будет использоваться позже в доказательстве теоремы о глобальной погрешности.

**Теорема 1.** Предположим, что  $y(t)$  — точное решение системы FDDE (1.1-1.2) и  $v(t)$  является ломаной линией, сформированной через дискретные точки согласно формуле (1.27),

так что  $D_t^\beta \nu(t) = f(t_s + \zeta_\ell h, y(t_s + \zeta_\ell h), d_\ell)$ ,  $t_s < t < t_{s+1}$ . Если следующие неравенства справедливы

$$\| \nu(t) - y(t) \| \leq \phi(t_0), \quad t \in [-\tau, 0], \quad (1.33)$$

$$\| D_t^{(\beta)} \nu(t) - f(t, \nu(t), \nu(t - \tau)) \| \leq \varepsilon, \quad (1.34)$$

$$\| f(t, \nu(t), \nu(t - \tau)) - f(t, y(t), \nu(t - \tau)) \| \leq l_1 \| \nu(t) - y(t) \|, \quad (1.35)$$

$$\| f(t, y(t), \nu(t - \tau)) - f(t, y(t), y(t - \tau)) \| \leq l_2 \| \nu(t - \tau) - y(t - \tau) \|, \quad (1.36)$$

где  $l_1, l_2$  — две положительные константы, тогда для  $t \geq t_0$  мы имеем следующую оценку погрешности

$$\begin{aligned} \| \nu(t) - y(t) \| \leq & \frac{\phi(t_0)}{\sum_{j=0}^{q-1} l^j E_1(j\beta - 1, l^q)} \left[ \sum_{j=0}^{q-1} l^j E_{t/t_0}(j\beta - 1, l^q) \right] + \\ & \varepsilon \left[ \sum_{j=1}^q l^{j-1} E_{t/t_0}(j\beta, l^q) - \sum_{j=1}^q l^{j-1} E_1(j\beta, l^q) \right], \quad q = \frac{1}{\beta}. \end{aligned} \quad (1.37)$$

*Доказательство.* Для любой выбранной нормы исследуем погрешность

$$m(t) = \| \nu(t) - y(t) \|, \quad m_\tau(t) = \| \nu(t - \tau) - y(t - \tau) \|, \quad (1.38)$$

оценив её возрастание.

Действуя на обе части первого уравнения в (1.38) дробным оператором дифференцирования Капуто  $D_t^{(\beta)}$  и используя неравенство треугольника, получаем

$$\begin{aligned} D_t^{(\beta)} m(t) & \leq \| D_t^{(\beta)} \nu(t) - f(t, \nu(t), \nu(t - \tau)) \| + \| f(t, \nu(t), \nu(t - \tau)) - f(t, y(t), y(t - \tau)) \| \quad (1.39) \\ & \leq \| D_t^{(\beta)} \nu(t) - f(t, \nu(t), \nu(t - \tau)) \| + \| f(t, \nu(t), \nu(t - \tau)) - f(t, y(t), \nu(t - \tau)) \| \\ & \quad + \| f(t, y(t), \nu(t - \tau)) - f(t, y(t), y(t - \tau)) \|, \end{aligned}$$

Определим величиной  $\delta(t) = \| D_t^{(\beta)} \nu(t) - f(t, \nu(t), \nu(t - \tau)) \|$  дефект аппроксимационного решения  $\nu(t)$ , причем  $\delta(t) \leq \varepsilon$ . Используя условия Липшица (1.35)–(1.36), мы получаем

$$D_t^{(\beta)} m(t) \leq \delta(t) + l_1 m(t) + l_2 m(t), \quad \delta(t) \leq \varepsilon, \quad (1.40)$$

$$m(t) = \phi(t_0) \quad \forall t \in [-\tau, 0]. \quad (1.41)$$

Предположим, что  $m(t) \leq u(t)$ ,  $m_\tau(t) \leq u(t)$  и определим  $l := l_1 + l_2$ . Это приводит к решению вместо (1.40) следующего дробного дифференциального уравнения

$$D_t^{(\beta)} u(t) = l u(t) + \varepsilon, \quad (1.42)$$

$$u(t) = \phi(t_0) \quad \forall t \in [-\tau, 0]. \quad (1.43)$$



В соответствии с [127], решение (1.42) – (1.43) может быть записано, используя функцию  $E_t(\beta, a) = t^\beta \exp(at) \gamma^*(\beta, at)$ , где  $\gamma^*$  – неполная гамма-функция. Неполная гамма-функция определяется как  $\gamma^*(\beta, t) = \exp(-t) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(\beta+k+1)}$  – функция двух переменных  $\beta$  и  $t$ . Также  $E_t(\beta, a) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t \zeta^{\beta-1} \exp(a(t-\zeta)) d\zeta$ ,  $\text{Re}\beta > 0$ .

Тогда решение (1.42) – (1.43) может быть переписано в виде

$$u(t) = \frac{\phi(t_0)}{\sum_{j=0}^{q-1} l^j E_1(j\beta - 1, l^q)} \left[ \sum_{j=0}^{q-1} l^j E_{t/t_0}(j\beta - 1, l^q) \right] + \varepsilon \left[ \sum_{j=1}^q l^{j-1} E_{t/t_0}(j\beta, l^q) - \sum_{j=1}^q l^{j-1} E_1(j\beta, l^q) \right], \quad q = \frac{1}{\beta}. \quad (1.44)$$

Комбинируя  $m(t) \leq u(t)$  с (1.44) получаем желаемый результат (1.37).  $\square$

**Теорема 2.** Пусть  $U$  – окрестность множества  $(t, y(t) | t_0 \leq t \leq t_N)$ , где  $y(t)$  – точное решение (1.1-1.2). Предположим, что  $\| \frac{df}{dy} \| \leq l$  выполняется в  $U$  и оценка локальной погрешности (1.31-1.32) справедлива в  $U$ . Тогда для глобальной погрешности  $E$  выполняется оценка

$$\| E \| \leq CC_1 \frac{\phi(t_0)}{\sum_{j=0}^{q-1} l^j E_1(j\beta - 1, l^q)} h^{4\beta}, \quad (\delta_\ell = 0), \quad (1.45)$$

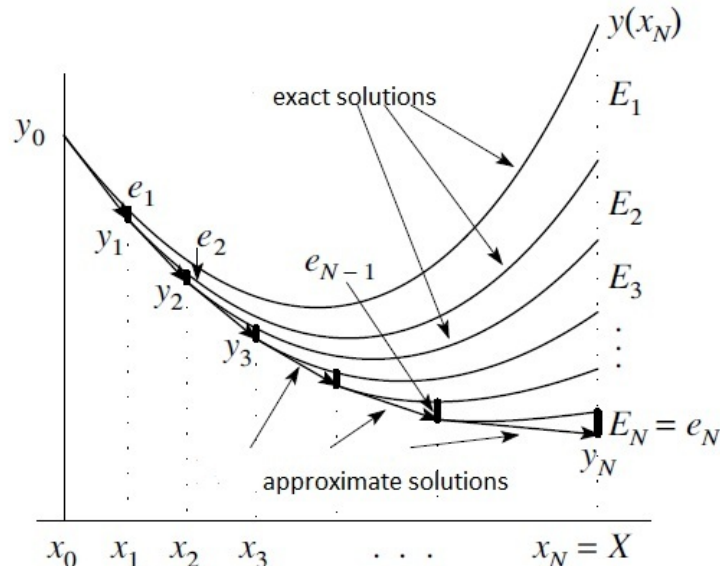
$$\| E \| \leq CC_2 \frac{\phi(t_0)}{\sum_{j=0}^{q-1} l^j E_1(j\beta - 1, l^q)} (h^{4\beta} + h^2), \quad (0 < \delta_\ell < 1), \quad (1.46)$$

где

$$h = \max_{1 < s \leq N} h_{s-1}, \quad I \leq \begin{cases} C_1, & \text{для } l \geq 0; \\ C_2, & \text{для } l < 0. \end{cases} \quad (1.47)$$

и шаг  $h$  достаточно мал, чтобы приближенное решение оставалось в  $U$ .

*Доказательство.* Глобальная погрешность  $E = y(t_N) - y_N$  находится после  $N - s$  шагов численного метода, см. Рис. 1.



Оценивая локальную погрешность  $e_s$  с помощью (1.31-1.32), получаем  $\|e_s\| \leq C h_{s-1}^{5\beta}$ , ( $\delta_\ell = 0$ ) и  $\|e_s\| \leq C (h_{s-1}^{5\beta} + h_{s-1}^{\beta+2})$ , ( $0 < \delta_\ell < 1$ ).

Из теоремы 1 с  $\varepsilon = 0$ , т.е. из теоремы о непрерывной зависимости по начальным условиям, получаем

$$\|E_s\| \leq \|e_s\| \frac{\phi(t_0)}{\sum_{j=0}^{q-1} l^j E_1(j\beta - 1, l^q)} \left[ \sum_{j=0}^{q-1} l^j E_{t/t_0}(j\beta - 1, l^q) \right], \quad (1.48)$$

Используя веер леди Вандермир, мы видим, что

$$\|E\| \leq \sum_{s=1}^N \|E_s\|. \quad (1.49)$$

При выводе соотношений (1.48)-(1.49) используется ( $h = \max_{1 < s \leq N} h_{s-1} \Rightarrow h_{s-1}^{5\beta} \leq h^{4\beta} h_{s-1}^\beta$ ,  $h_{s-1}^{\beta+2} \leq h^2 h_{s-1}^\beta$ ). Рассматривая два различных случая для приближения функции с запаздыванием, мы получаем:

**1-ый случай** ( $\delta_\ell = 0$ ):

$$\|E\| \leq C h^{4\beta} \frac{\phi(t_0)}{\sum_{j=0}^{q-1} l^j E_1(j\beta - 1, l^q)} \sum_{s=1}^N h_{s-1}^\beta \left[ \sum_{j=0}^{q-1} l^j E_{t_N/t_s}(j\beta - 1, l^q) \right] = C h^{4\beta} \frac{\phi(t_0)}{\sum_{j=0}^{q-1} l^j E_1(j\beta - 1, l^q)} I, \quad (1.50)$$

**2-ой случай** ( $0 < \delta_\ell < 1$ ):

$$\|E\| \leq C (h^{4\beta} + h^2) \frac{\phi(t_0)}{\sum_{j=0}^{q-1} l^j E_1(j\beta - 1, l^q)} \sum_{s=1}^N h_{s-1}^\beta \left[ \sum_{j=0}^{q-1} l^j E_{t_N/t_s}(j\beta - 1, l^q) \right] = C (h^{4\beta} + h^2) \frac{\phi(t_0)}{\sum_{j=0}^{q-1} l^j E_1(j\beta - 1, l^q)} I, \quad (1.51)$$

$$I \leq \begin{cases} \int_{t_0}^{t_N} \sum_{j=0}^{q-1} l^j E_{t_N/t}(j\beta - 1, l^q) dt, & \text{для } l \geq 0; \\ \int_{t_0}^{t_N} \sum_{j=0}^{q-1} l^j E_{t_N/(t+h)}(j\beta - 1, l^q) dt, & \text{для } l < 0. \end{cases} \quad (1.52)$$

Комбинация (1.50)-(1.52) дает требуемый результат (1.45).  $\square$

**Лемма 4.** Так как глобальная погрешность  $E$  (1.45) стремится к нулю при  $h$ , то предложенный метод (1.24) сходится, т.е.  $|E| \rightarrow 0$  если  $h \rightarrow 0$ .

## 1.4 Численные эксперименты

В этом разделе мы иллюстрируем эффективность теоретических результатов, полученных в предыдущих разделах. Мы рассмотрим реальные модели с производной в смысле Капуто.

Первая модель основана на эффекте зашумления света лазера, который отражает зеркало. Эта модель была введена Piegoux [128].

$$D^\beta y(t) = \frac{-1}{\epsilon} y(t) + \frac{1}{\epsilon} y(t)y(t - \tau), \quad t \geq 0, \quad (1.53)$$

$$y(t) = 0.9, \quad t \in [-\tau, 0]. \quad (1.54)$$

Вторая модель — это модель Хатчинсона, которая описывает скорость роста популяций. Скорость роста числа особей в популяции в каждый момент времени зависит от числа особей в предыдущие моменты времени, такое уравнение дано в [77]

$$D^\beta y(t) = ry(t) - \frac{r}{k} y(t)y(t - \tau), \quad t \geq 0, \quad (1.55)$$

$$y(t) = y^0, \quad t \in [-\tau, 0]. \quad (1.56)$$

Главная цель этого раздела убедиться в сходимости нашего метода. Но точные решения для рассматриваемых примеров неизвестны, поэтому максимальная абсолютная погрешность  $E(h)$  и порядок сходимости  $R(h)$  при численном решении каждого из этих рассматриваемых примеров вычисляются используя принцип удвоения сетки [38]:

$$E(h) = \max_s |y_s(h) - y_s(2h)|, \quad R(h) = \log_2 \left( \frac{E(2h)}{E(h)} \right),$$

где шаг по времени берется так:  $h = \frac{1}{2^n}$ .

Вычисленные максимальная абсолютная погрешность и порядок сходимости для численного решения в рассматриваемых моделях отражены в виде следующих таблиц:

|                | $n = 8$                       | $n = 16$                       | $n = 32$                      | $n = 64$             |
|----------------|-------------------------------|--------------------------------|-------------------------------|----------------------|
| $\beta = 0.25$ | $2.2 \times 10^{-3}$<br>0.98  | $1.1 \times 10^{-3}$<br>0.988  | $5.6 \times 10^{-4}$<br>0.997 | $2.8 \times 10^{-4}$ |
| $\beta = 0.50$ | $5.3 \times 10^{-3}$<br>1.978 | $1.35 \times 10^{-3}$<br>1.988 | $3.4 \times 10^{-4}$<br>1.999 | $8.5 \times 10^{-5}$ |
| $\beta = 0.75$ | $1.6 \times 10^{-4}$<br>2.995 | $2.01 \times 10^{-5}$<br>2.998 | $2.5 \times 10^{-6}$<br>2.999 | $3.1 \times 10^{-7}$ |

Табл. 1.1: Максимум абсолютной погрешности и порядок сходимости для 1-ой модели (1.53-1.54) при  $\tau = 1$ ,  $\epsilon = 0.1$

|                | $n = 8$                       | $n = 16$                         | $n = 32$                          | $n = 64$                 |
|----------------|-------------------------------|----------------------------------|-----------------------------------|--------------------------|
| $\beta = 0.25$ | $8.5 \times 10^{-2}$<br>0.97  | $4.3393 \times 10^{-2}$<br>0.985 | $2.19233 \times 10^{-2}$<br>0.993 | $1.10149 \times 10^{-2}$ |
| $\beta = 0.50$ | $2.5 \times 10^{-3}$<br>1.96  | $6.4 \times 10^{-4}$<br>1.977    | $1.6 \times 10^{-4}$<br>1.986     | $4.1 \times 10^{-5}$     |
| $\beta = 0.75$ | $7.8 \times 10^{-3}$<br>1.988 | $1.96 \times 10^{-3}$<br>1.993   | $4.9 \times 10^{-4}$<br>1.998     | $1.2 \times 10^{-4}$     |

Табл. 1.2: Максимум абсолютной погрешности и порядок сходимости для 1-ой модели (1.53-1.54) при  $\tau = 0.3$ ,  $\epsilon = 0.1$

|                | $n = 8$                       | $n = 16$                      | $n = 32$                       | $n = 64$               |
|----------------|-------------------------------|-------------------------------|--------------------------------|------------------------|
| $\beta = 0.25$ | $5.3 \times 10^{-4}$<br>0.965 | $2.7 \times 10^{-4}$<br>0.978 | $1.4 \times 10^{-4}$<br>0.983  | $6.97 \times 10^{-5}$  |
| $\beta = 0.50$ | $6.2 \times 10^{-4}$<br>1.977 | $1.5 \times 10^{-4}$<br>1.984 | $3.98 \times 10^{-5}$<br>1.992 | $1.00 \times 10^{-5}$  |
| $\beta = 0.75$ | $1.4 \times 10^{-5}$<br>2.975 | $1.8 \times 10^{-6}$<br>2.899 | $2.4 \times 10^{-7}$<br>2.994  | $3.996 \times 10^{-8}$ |

Табл. 1.3: Максимум абсолютной погрешности и порядок сходимости для 2-ой модели (1.55-1.56) при  $\tau = 2$ ,  $r = 0.15$ ,  $k = 1$ ,  $y^0 = 0.5$ .

|                | $n = 8$                       | $n = 16$                      | $n = 32$                      | $n = 64$             |
|----------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|----------------------|
| $\beta = 0.25$ | $3.3 \times 10^{-4}$<br>0.988 | $1.6 \times 10^{-4}$<br>0.996 | $3.3 \times 10^{-5}$<br>0.999 | $4.2 \times 10^{-5}$ |
| $\beta = 0.50$ | $2.2 \times 10^{-5}$<br>1.976 | $5.6 \times 10^{-6}$<br>1.985 | $1.4 \times 10^{-6}$<br>1.995 | $3.6 \times 10^{-7}$ |
| $\beta = 0.75$ | $7.2 \times 10^{-5}$<br>1.997 | $1.8 \times 10^{-5}$<br>1.999 | $4.5 \times 10^{-6}$<br>2.01  | $1.1 \times 10^{-6}$ |

Табл. 1.4: Максимум абсолютной погрешности и порядок сходимости для 2-ой модели (1.55-1.56) при  $\tau = 0.2$ ,  $r = 0.15$ ,  $k = 1$ ,  $y^0 = 0.5$ .

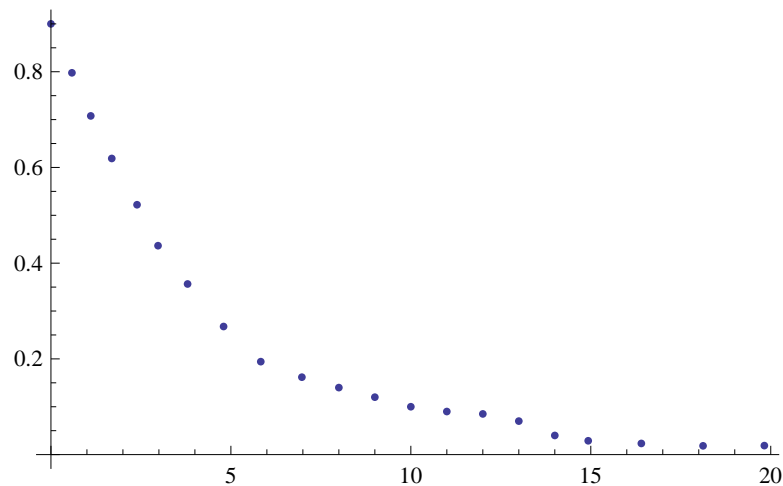


Рис. 2. Численное решение при  $\beta = 1$  для первой модели (1.53-1.54), когда  $\tau = 3$ ,  $\epsilon = 0.1$ .

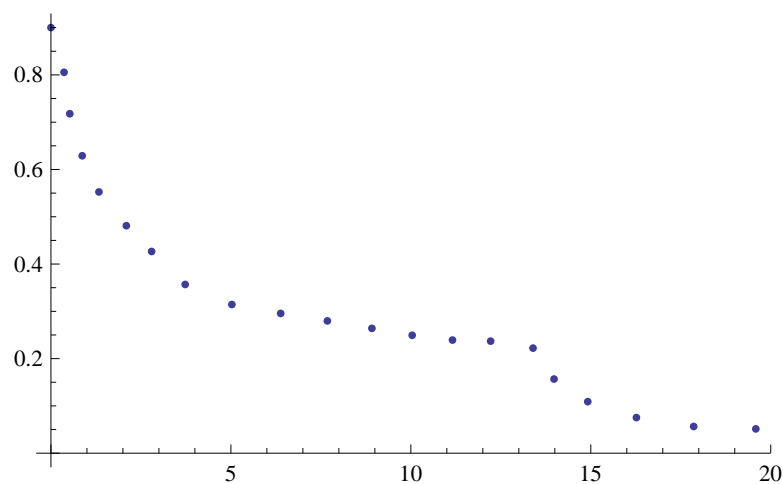


Рис. 3. Численное решение при  $\beta = 0.75$  для первой модели (1.53-1.54), когда  $\tau = 3$ ,  $\epsilon = 0.1$ .

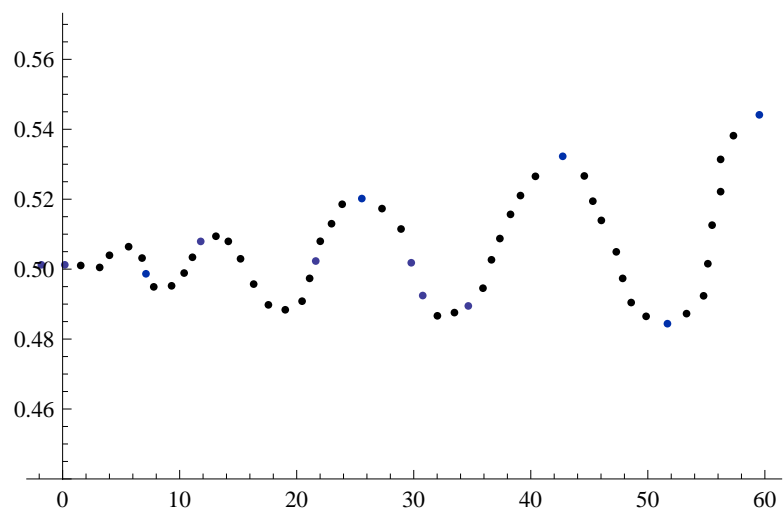


Рис. 4. Численное решение при  $\beta = 1$  для второй модели (1.55-1.56), когда  $\tau = 2$ ,  $k = 1$ ,  $r = 1$ ,  $y^0 = 0.5$ .

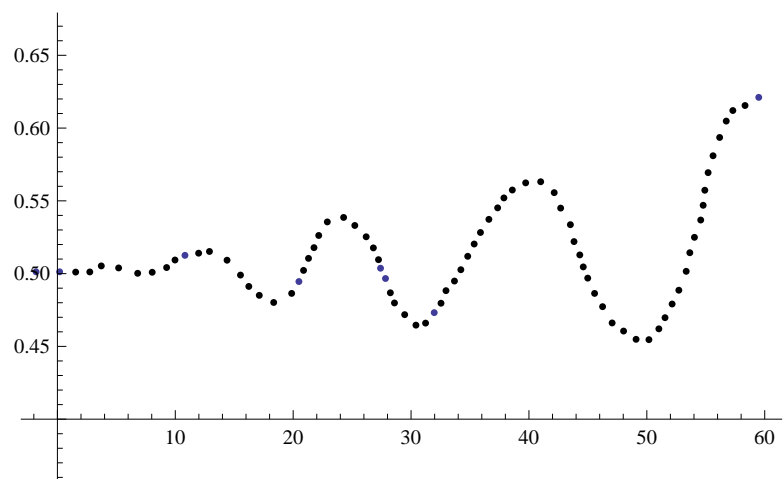


Рис. 5. Численное решение при  $\beta = 0.75$  для второй модели (1.55-1.56), когда  $\tau = 2$ ,  $k = 1$ ,  $r = 1$ ,  $y^0 = 0.5$ .

## 1.5 Заключение и замечания

В этой главе были приведены конструкции неявного метода для приближения решения дробного дифференциального уравнения с нелинейным запаздыванием. Этот метод является методом BDF-типа и основан на аппроксимации точного решения на соответствующем

отрезке сдвинутыми полиномами Чебышева. Выведены оценки для локальной и глобальной погрешности численного решения FDDE. Показано, что в случае переменного запаздывания порядок сходимости метода для FDDE зависит по-разному в двух введенных случаях от величины запаздывания. Доказано, что порядок сходимости для FDE равен  $4\beta$ . Порядок сходимости для FDDE тоже равен  $4\beta$ , если зависимость с запаздыванием аппроксимируется в соответствии с первым случаем ( $\delta_\ell = 0$ ) и равен  $\min(4\beta, 2)$ , если зависимость с запаздыванием аппроксимируется в соответствии со вторым случаем ( $0 < \delta_\ell < 1$ ). Теоретические результаты совпадают с результатами, полученными в результате численного экспериментирования.

## Глава 2

# Численное решение уравнения диффузии с дробными производными по пространству и с функциональным запаздыванием

### 2.1 Введение

Уравнения диффузии с запаздыванием общего вида, постоянным или переменным, сосредоточенным или распределенным широко применяются в моделировании динамических процессов [166, 172]. Они содержат два эффекта: распределенность параметров по пространству и наследственность по времени. Численные методы решения таких уравнений были рассмотрены во многих работах, например, в [80, 102, 159, 162, 178]. В работе [11] для уравнения теплопроводности с общим запаздыванием была предложена техника исследования устойчивости и сходимости разностным схем, которая использует как общую теорию разностных схем [16], так и общую теорию численных схем для функционально-дифференциальных уравнений [5, 8]. После этого данная техника была применена для исследования численных методов решения уравнений гиперболического типа с запаздыванием [13], различных типов, в том числе и многомерных, уравнений параболического типа с запаздыванием [10, 104], уравнений переноса с запаздыванием [12, 18]. В данной главе эта техника применяется для уравнений в частных производных с дробными производными по пространству и с эффектом функционального запаздывания по времени.

Дробные дифференциальные уравнения [65, 137] вызывают большой интерес в последние десятилетия вследствие их большей точностью при моделировании во многих областях на-

уки. Уравнения в частных производных дробного порядка подразделяются на два больших класса: с дробными производными по пространству и с дробными производными по времени.

Диффузионные уравнения дробного порядка являются обобщениями классических диффузионных уравнений, описывая суб или супер диффузионный поток. Модели дробных диффузионных уравнений появляются в явлениях аномальной диффузии, которые не могут с достаточной точностью промоделированы уравнениями диффузии второго порядка. Например, в процессе переноса загрязняющих веществ в грунтовые воды через водоносные слои, не выполняется закон Фика, который приводит к уравнению в частных производных второго порядка, из-за больших отклонений от случайного процесса броуновского движения. Вместо этого основное уравнение с аномальной диффузией дробного порядка обеспечивает более адекватное и точное описание движения растворенных веществ [43]. Дробные уравнения диффузии были использованы при моделировании турбулентного потока [52, 150], хаотической динамики классических консервативных систем [171], загрязнения грунтовых вод [42, 43], а также при их применениях в биологии [118], в физике [151], в химии [99], и даже в финансах [138, 145].

В этой главе мы конструируем аналоги метода Кранка-Никольсон для решения уравнения диффузии с левосторонней дробной производной и двухсторонней дробной производной по пространству и с функциональным запаздыванием. Мы продолжаем идеи работ [124, 156] на случай уравнений с функциональным запаздыванием. В работе [156] авторы предложили практический численный метод второго порядка точности по времени и по пространству для решения класса начально-граничных задач уравнений с дробной диффузией с переменными коэффициентами в конечной области. Приближения основывались на классическом методе Кранка-Никольсон в комбинации с пространственной экстраполяцией левой дробной производной сдвинутыми формулами Грюнвальда-Летникова. Исследовалась устойчивость (показана безусловная устойчивость), сходимость и порядок сходимости. В этой работе рассматривалось одномерное по пространству уравнение дробной диффузии.

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = d(x) \frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial x^\alpha} + q(x, t), \quad x_L < x < x_R, \quad 1 < \alpha \leq 2, \quad (2.1)$$

предполагается, что коэффициент диффузии  $d(x) > 0$ , рассматриваются начальные условия вида  $u(x, 0) = s(x)$  и граничные условия типа Дирихле  $u(x_L, t) = 0$ ,  $u(x_R, t) = b_R(t)$ . Дробная производная в (2.1) — (левосторонняя) дробная производная Римана по переменной  $x$ . Дробная производная Римана порядка  $\alpha$  определяется формулой

$$\frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_L^x \frac{f(\zeta)}{(x - \zeta)^{\alpha+1-n}} d\zeta, \quad 1 < \alpha \leq 2, \quad (2.2)$$

где  $n = [\alpha] + 1 = 2$  — целое. Предполагается, что  $u(x_L, t) = 0$ , если  $x_L \leq L$ , поэтому решение



продолжается нулем, если  $x < x_L$ , так что значение  $L$  неважно. Заметим, что случай  $\alpha = 2$  дает классическое уравнение диффузии. Случай  $1 < \alpha < 2$  моделирует супердиффузионный поток, в котором облако распространяющихся частиц распространяется по более быстрому уровню, чем предсказывает классическая модель диффузии [121, 126], а случай  $\alpha = 1$  соответствует классическому уравнению адвекции.

В работе [124] результаты распространялись на случай двухсторонней дробной производной по пространству, для уравнения вида

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = d_+(x, t) \frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial_+ x^\alpha} + d_-(x, t) \frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial_- x^\alpha} + q(x, t), \quad (2.3)$$

где  $L < x < R$ ,  $0 \leq t \leq T$ ,  $1 < \alpha \leq 2$ , и функции  $d_+(x, t)$ ,  $d_-(x, t)$  могут быть интерпретированы как относительные коэффициенты супердиффузии. Заданы начальные условия вида  $u(x, 0) = s(x)$  и нулевые граничные условия типа Дирихле. Левосторонняя (+) и правосторонняя (−) дробные производные в (2.3) определяются в смысле дробных производных Римана-Лиувилля порядка  $\alpha$  [127]

$$\frac{d^\alpha f(x)}{dx_+^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_L^x \frac{f(\zeta)}{(x - \zeta)^{\alpha+1-n}} d\zeta, \quad 1 < \alpha \leq 2, \quad (2.4)$$

$$\frac{d^\alpha f(x)}{dx_-^\alpha} = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_x^R \frac{f(\zeta)}{(\zeta - x)^{\alpha+1-n}} d\zeta, \quad 1 < \alpha \leq 2, \quad (2.5)$$

где  $n = [\alpha] + 1 = 2$  — целое. Отметим, что левосторонняя дробная производная функции  $f(x)$  в точке  $x$  зависит от всех значений функции в точках левее точки  $x$ , то есть производная есть средняя с весами скорость. Подобным образом, правосторонняя дробная производная функции  $f(x)$  в точке  $x$  зависит от всех значений функции в точках правее точки  $x$ . В общем случае левосторонняя и правосторонняя производные не равны, если только  $\alpha$  не является четным целым. В этом случае производные равны и становятся локальными. В случае  $\alpha$  нечетного целого производные локальны, но противоположны по знаку.

## 2.2 Метод Кранка-Никольсон для дробного диффузионного уравнения

Предварительно кратко изложим результаты работ [124, 156], на которых существенно опирается наше исследование. Рассмотрим уравнение (2.1).

Пространственная дробная производная порядка  $\alpha$  может быть дискретизирована с помощью конечноразностной формулы Грюнвальда [127]. Обычные формулы Грюнвальда в общем случае приводят к неустойчивым разностным уравнениям независимо от того, явный метод или неявный, см. обсуждение в [123]. Поэтому мы будем использовать сдвинутые

вправо формулы Грюнвальда для того, чтобы приблизить пространственную дробную производную порядка  $\alpha$

$$\frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^N \frac{\Gamma(k-\alpha)}{\Gamma(k+1)} u(x((k-1)h), t), \quad (2.6)$$

где  $N$  — положительное целое,  $h = \frac{x-x_L}{N}$  и  $\Gamma(\cdot)$  — гамма-функция.

Для построения аналога численного метода Кранка-Никольсон определим точки  $t_n = n\delta t$  для моментов времени  $0 \leq t_n \leq T$  и пусть  $\Delta x = h > 0$  — величина шага по переменной  $x$ , причем  $\Delta x = \frac{x_R-x_L}{N_x}$ ,  $x_i = x_L + i\Delta x$  для  $i = 0, \dots, N_x$ ; определим  $u_i^n = u(x_i, t_n)$ ,  $d_i = d(x_i)$ ,  $q_i^{n+1/2} = q(x_i, t_{n+1/2})$ . Через  $U_i^n$  обозначим численную аппроксимацию  $u(x_i, t_n)$ , и пусть  $g_{k,\alpha} = \frac{\Gamma(k-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(k+1)}$ .

Если сдвинутые формулы Грюнвальда подставить в уравнение супердиффузии (2.1) мы получим численную аппроксимацию типа Кранка-Никольсон, конечно-разностные уравнения имеют вид [156]

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} = \frac{d_i}{2} (\delta_{\alpha,x} U_i^{n+1} + \delta_{\alpha,x} U_i^n) + q_i^{n+1/2}, \quad (2.7)$$

где дробный оператор численного дифференцирования определен следующим образом

$$\delta_{\alpha,x} U_i^n = \frac{1}{(\Delta x)^\alpha} \sum_{k=0}^{i+1} g_{k,\alpha} U_{i-k+1}^n. \quad (2.8)$$

Он имеет аппроксимацию порядка  $O(\Delta x)$  в соответствие со следующей теоремой [156], в которой выражена ошибка Тейлоровского разложения для сдвинутой конечно-разностной формула Грюнвальда.

**Теорема 3.** Пусть  $1 < \alpha < 2$ ,  $f \in C^{n+3}(R)$  причем производные  $f$  порядка до  $n+3$  принадлежат  $L^1(R)$ . Для любого целого  $p \geq 0$  определим сдвинутый разностный оператор Грюнвальда

$$\delta_{h,p}^\alpha f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(x - (j-p)h),$$

тогда если  $L = -\infty$  в (2.2), получаем что для некоторых постоянных  $a_l$  независящих от  $h, f, x$  выполняется

$$h^{-\alpha} \delta_{h,p}^\alpha f(x) = \frac{d^\alpha}{dx^\alpha} f(x) + \sum_{l=1}^{N-1} (a_l \frac{d^{\alpha+l}}{dx^{\alpha+l}}) h^l + O(h^n), \quad (2.9)$$

равномерно для  $x \in R$ .

Определения Грюнвальда для правосторонней и левосторонней дробной производной соответственно

$$\frac{d^\alpha f(x)}{dx_+^\alpha} = \lim_{M_+ \rightarrow \infty} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{M_+} g_{k,\alpha} f(x - kh), \quad (2.10)$$

$$\frac{d^\alpha f(x)}{dx_-^\alpha} = \lim_{M_- \rightarrow \infty} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{M_-} g_{k,\alpha} f(x + kh), \quad (2.11)$$

где  $M_+$ ,  $M_-$  — положительные целые,  $h_+ = (x-L)/M_+$ ,  $h_- = (R-x)/M_-$  и нормализованные веса определяются как  $g_{0,\alpha} = 1$ ,  $g_{k,\alpha} = (-1)^k \frac{(\alpha)(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$ . Заметим, что нормализованные веса зависят только от порядка  $\alpha$  и индекса  $k$ .

Правосторонняя и левосторонняя формулы Грюнвальда определяются следующим образом [123]

$$\frac{d^\alpha f(x)}{dx_+^\alpha} = \lim_{M_+ \rightarrow \infty} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{M_+} g_{k,\alpha} f(x - (k-1)h), \quad (2.12)$$

$$\frac{d^\alpha f(x)}{dx_-^\alpha} = \lim_{M_- \rightarrow \infty} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{M_-} g_{k,\alpha} f(x + (k-1)h), \quad (2.13)$$

В работе [124] сконструированы два метода: аналоги явного и неявного метода Эйлера с использованием сдвинутых формул Грюнвальда (2.12)-(2.13). Явный метод разностный Эйлера устойчив, если  $\frac{\Delta t}{h^\alpha} \leq \frac{1}{\alpha(d_+ \max + d_- \max)}$ , где  $\Delta t$  — шаг по времени,  $d_+ \max$  и  $d_- \max$  — максимальные из правосторонних и левосторонних коэффициентов супердиффузии в точках разбиения. Неявный разностный метод Эйлера безусловно устойчив.

### 2.3 Вывод дробного метода Кранка-Никольсон для одностороннего дробного по пространству уравнения диффузии с функциональным запаздыванием

Сеточные методы для параболических уравнений с функциональным эффектом запаздывания были сконструированы в [11], где также был исследован порядок их сходимости. Математические аспекты таких объектов изучались, в частности, в монографии [166], где объектом исследования было уравнение

$$\frac{du}{dt} = Au(t) + f(u_t), \quad (2.14)$$

где  $u$  — элемент банахова пространства,  $u_t = \{u(t+\zeta), -\tau \leq \zeta \leq 0\}$  — предыстория,  $\tau$  — положительная величина запаздывания,  $f$  — нелинейное отображение,  $A$  — инфинитезимально порождающий оператор полугруппы. Такие уравнения включают, в частности, параболические уравнения с запаздыванием, которые возникают при моделировании многих процессов [166].

В работе [11], с позиции сеточных методов, используя интерполяцию (с заданными свойствами [5]) дискретной предыстории модели, авторы сконструировали схемы с весами. Они

исследовали порядок аппроксимации, устойчивость и порядки сходимости этих схем, используя как технику общей теории линейных разностных схем [16], так и технику теории разностных схем для функционально-дифференциальных уравнений [5, 8].

В работе [11] авторы рассматривали простейшую начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности с эффектом запаздывания общего вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t, u(x, t), u_t(x, \cdot)), \quad x \in [x_0, X], \quad t \in [t_0, T], \quad (2.15)$$

где  $u(x, t)$  — искомая функция,

$$u_t(x, \cdot) = \{u(x, t + s), t_0 - \tau \leq s < t_0\}, \quad (2.16)$$

предыстория искомой функции к моменту  $t$ ,  $\tau > 0$  — величина запаздывания. Заданы начальные и граничные условия

$$u(x, t) = \varphi(x, t), \quad x \in [x_0, X], \quad t \in [t_0 - \tau, t_0], \quad (2.17)$$

$$u(x_0, t) \equiv 0, \quad u(X, t) = b(t), \quad t \in [t_0, T]. \quad (2.18)$$

В работе [11] было сконструировано семейство численных методов, основанных на идеях разделения текущего состояния и функции-предыстории. Авторами были получены теорема о порядке сходимости и условия устойчивости.

### 2.3.1 Формулировка задачи и главные предположения

Здесь мы распространим неявную схему (2.7), предложенную для дробного уравнения диффузии (2.1) на случай функционального запаздывания (2.16). Главной целью будет проверка возможности вложения конструкций неявной разностной схемы для дробного уравнения диффузии с функциональным запаздыванием в общую разностную схему систем с наследственностью. После этого устойчивость и порядок сходимости получены на основе техники доказательства подобных утверждений [5, 8].

Рассмотрим одностороннее дробное уравнение диффузии (2.1) с нелинейной зависимостью от искомой функции и с функциональным запаздыванием (2.16)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = d \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} + f(x, t, u(x, t), u_t(x, \cdot)), \quad x \in [x_0, X], \quad t \in [t_0, T], \quad d > 0, \quad (2.19)$$

$u_t(x, \cdot)$  — функция предыстории, определенная в (2.16),  $\tau > 0$  — величина запаздывания и порядок  $1 < \alpha \leq 2$ . Заданы также начальные и граничные условия (2.17), (2.18).

Заметим, что основы теории для начальной задачи для дробного функционально-дифференциального уравнений были рассмотрены в [103], с помощью распространения соответствующей теории обыкновенных функционально-дифференциальных уравнений. Будем предполагать,

что функции  $\varphi(x, t)$ ,  $b(t)$  и функционал  $f$  таковы, что задача имеет единственное решение  $u(x, t)$ . Обозначим через  $Q = Q[-\tau, 0)$  множество функций  $u(\xi)$ , кусочно-непрерывных на  $[-\tau, 0)$  с конечным числом точек разрыва первого рода, в точках разрыва непрерывных справа. Мы определим норму функций соотношением  $\|u(\cdot)\|_Q = \sup_{\xi \in [-\tau, 0)} |u(\xi)|$ . Дополнительно будем предполагать, что функционал  $f(x, t, u, v(\cdot))$  определен на  $[x_0, X] \times [t_0, T] \times R \times Q$  и липшицев по последним двум аргументам, т.е. существует постоянная  $L_f$ , такая что для всех  $x \in [x_0, X]$ ,  $t \in [t_0, T]$ ,  $u^1 \in R$ ,  $u^2 \in R$ ,  $v^1(\cdot) \in Q$  и  $v^2(\cdot) \in Q$  выполняется условие

$$|f(x, t, u^1, v^1(\cdot)) - f(x, t, u^2, v^2(\cdot))| \leq L_f(|u^1 - u^2| + \|v^1(\cdot) - v^2(\cdot)\|_Q). \quad (2.20)$$

### 2.3.2 Вывод разностной схемы

Введем некоторые обозначения. Пусть  $h = (X - x_0)/N$ , обозначим  $x_i = x_0 + ih$ ,  $i = 0, \dots, N$ , и  $\Delta = (T - t_0)/M$ ,  $t_j = t_0 + j\Delta$ ,  $j = 0, \dots, M$ . Пусть  $\tau/\Delta = m$  — положительное целое. Обозначим через  $u_j^i$  приближения функции  $u(x_i, t_j)$  в узлах.

Для каждого фиксированного  $i = 0, \dots, N$ , введем дискретную предысторию по времени в точках  $t_j$ ,  $j = 0, \dots, M$ :  $\{u_k^i\}_j = \{u_k^i, j - m \leq k \leq j\}$ . Отображение  $I : \{u_k^i\}_j \rightarrow v^i(t)$ ,  $t \in [t_j - \tau, t_j + \Delta/2]$  назовем оператором интерполяции-экстраполяции дискретной предыстории. Мы будем использовать кусочно-линейную интерполяцию с экстраполяцией продолжением

$$v^i(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta}(u_l^i(t - t_{l-1}) + u_{l-1}^i(t_l - t)), & t_{l-1} \leq t \leq t_l, \quad 1 \leq l \leq j, \\ \frac{1}{\Delta}(u_j^i(t - t_{j-1}) + u_{j-1}^i(t_j - t)), & t_j \leq t \leq t_j + \Delta/2, \\ \varphi(x_i, t), & t_0 - \tau \leq t \leq t_0. \end{cases}$$

Для приближения дробной производной мы будем использовать сдвинутую вправо формулу Грюнвальда (2.6), тогда

$$\frac{\partial^\alpha u(x_i, t_{j+1/2})}{\partial x^\alpha} \approx \frac{1}{2}(\delta_{\alpha, x} u_{j+1}^i + \delta_{\alpha, x} u_j^i), \quad \delta_{\alpha, x} u_j^i = \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{i+1} g_{\alpha, k} u_j^{i-k+1}. \quad (2.21)$$

Применяя обычную аппроксимацию для производной по времени, аппроксимацию (2.21) для дробной производной по пространству и используя интерполяцию с экстраполяцией для предыстории функции, мы получаем аналог метода Кранка-Никольсон

$$\frac{u_{j+1}^i - u_j^i}{\Delta} = \frac{d}{2}(\delta_{\alpha, x} u_{j+1}^i + \delta_{\alpha, x} u_j^i) + f_{j+\frac{1}{2}}^i, \quad (2.22)$$

$$f_{j+\frac{1}{2}}^i = f(x_i, t_j + \frac{\Delta}{2}, v^i(t_j + \frac{\Delta}{2}), v_{t_j + \frac{\Delta}{2}}^i(\cdot)), \quad i = 1, \dots, N, j = 0, \dots, M - 1,$$

с соответствующими начальными условиями  $u_0^i = \varphi(x_i, t_0)$ ,  $i = 0, \dots, N$ ,  $v_j^i(t) = \varphi(x_i, t)$ ,  $t < t_0$ ,  $i = 0, \dots, N$ , и граничными условиями  $u_j^0 = 0$ ,  $u_j^N = b(t_j)$ .  $j = 0, \dots, M$ . Вычислительная работа для решения этой системы сводится к решению двух трехдиагональных систем на каждом шаге времени. Для  $\alpha = 2$  и  $d = a^2$ , мы получаем схему Кранка-Никольсон для уравнения теплопроводности с функциональным запаздыванием так как  $\delta_{2, x} u_j^i = \frac{u_j^{i-1} - 2u_j^i + u_j^{i+1}}{h^2}$ .

## 2.4 Устойчивость и сходимость предложенной односторонней разностной схемы

Обозначим через  $\varepsilon_j^i = u(x_i, t_j) - u_j^i$  погрешность метода в узлах. Будем говорить, что метод сходится с порядком  $h^p + \Delta^q$ , если существует такая постоянная  $C$ , не зависящая от  $j, i, h$  и  $\Delta$ , что  $|\varepsilon_j^i| \leq C(h^p + \Delta^q)$  для всех  $i = 0, 1, \dots, N$  и  $j = 0, 1, \dots, N$ .

Невязкой (без интерполяции) метода (2.22) назовем сеточную функцию

$$\psi_j^i = \frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_j)}{\Delta} - \frac{d}{2}(\hat{\delta}_{\alpha,x}u(x_i, t_{j+1}) + \hat{\delta}_{\alpha,x}u(x_i, t_j)) - \hat{f}_{j+\frac{1}{2}}^i, \quad (2.23)$$

$$\hat{\delta}_{\alpha,x}u(x_i, t_j) = \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{i+1} g_{\alpha,k}u(x_{i-k+1}, t_j), \quad \hat{f}_{j+\frac{1}{2}}^i = f(x_i, t_{j+\frac{1}{2}}, u(x_i, t_{j+\frac{1}{2}}), u_{t_{j+\frac{1}{2}}}(x_i, \cdot))$$

**Лемма 5.** Пусть точное решение  $u(x, t) \in C^{4,3}([x_0, X] \times [t_0, T])$ ; выполнены условия теоремы (3); производная решения по  $t$  дважды непрерывно дифференцируема по  $x$ , тогда невязка (без интерполяции) метода (2.22) имеет порядок  $\Delta^2 + h$ .

*Доказательство.* Используя тейлоровские разложения, получаем

$$\frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_j)}{\Delta} = \frac{\partial u(x_i, t_{j+\frac{1}{2}})}{\partial t} + O_1, \quad |O_1| \leq C_1 \Delta^2. \quad (2.24)$$

Из результатов работы [156] и теоремы (3) получаем, что

$$\hat{\delta}_{\alpha,x}u(x_i, t_j) = \frac{\partial^\alpha u(x_i, t_j)}{\partial x^\alpha} + O_2, \quad |O_2| \leq C_2 h,$$

аналогично

$$\hat{\delta}_{\alpha,x}u(x_i, t_{j+1}) = \frac{\partial^\alpha u(x_i, t_{j+1})}{\partial x^\alpha} + O_3, \quad |O_3| \leq C_3 h.$$

Тогда

$$\hat{\delta}_{\alpha,x}u(x_i, t_{j+1}) + \hat{\delta}_{\alpha,x}u(x_i, t_j) = 2 \frac{\partial^\alpha u(x_i, t_{j+\frac{1}{2}})}{\partial x^\alpha} + O_2 + O_3 + O_4, \quad |O_4| \leq C_3 \Delta^2. \quad (2.25)$$

Подставляя (2.24) и (2.25) в определение невязки без интерполяции (2.23) и, учитывая, что  $u(x_i, t_{j+\frac{1}{2}})$  является точным решением уравнения (2.19), получаем утверждение леммы.  $\square$

Для каждого фиксированного  $i = 0, \dots, N$  введем дискретную предысторию точного решения для точек  $t_j, j = 0, \dots, M : \{u(x_i, t_k)\}_j = \{u(x_i, t_k), j-m \leq k \leq j\}$ . Будем использовать кусочно-линейную интерполяцию с экстраполяцией продолжением точного решения

$$w^i(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta}(u(x_i, t_l)(t - t_{l-1}) + u(x_i, t_{l-1})(t - t_l)), & t_{l-1} \leq t \leq t_l, \quad 1 \leq l \leq j, \\ \frac{1}{\Delta}(u(x_i, t_j)(t - t_{j-1}) + u(x_i, t_{j-1})(t - t_j)), & t_j \leq t \leq t_j + \Delta/2, \\ \varphi(x_i, t), & t_0 - \tau \leq t \leq t_0. \end{cases}$$

Невязкой с интерполяцией метода (2.22) назовем следующую сеточную функцию

$$\nu_j^i = \frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_j)}{\Delta} - \frac{d}{2}(\hat{\delta}_{\alpha,x}u(x_i, t_{j+1}) + \hat{\delta}_{\alpha,x}u(x_i, t_j)) - \check{f}_{j+\frac{1}{2}}^i, \quad (2.26)$$

$$\check{f}_{j+\frac{1}{2}}^i = f(x_i, t_{j+\frac{1}{2}}, w^i(t_j + \frac{\Delta}{2}), w_{t_j+\frac{\Delta}{2}}^i(\cdot))$$

**Лемма 6.** Пусть выполняются условия леммы (5), тогда невязка метода (2.22) с кусочно-линейной интерполяцией и экстраполяцией продолжением имеет порядок  $\Delta^2 + h$ .

*Доказательство.* Оператор кусочно-линейной интерполяции с экстраполяцией продолжением имеет второй порядок [11], поэтому найдется такая константа  $C_5$ , что для всех  $t \in [t_j - \tau, t_j + \frac{\Delta}{2}]$ , выполняется неравенство

$$|w^i(t) - u(x_i, t)| \leq C_5 \Delta^2. \quad (2.27)$$

Невязка (2.26) с интерполяцией и невязка (2.23) без интерполяции связаны соотношением

$$\nu_j^i = \psi_j^i + f(x_i, t_{j+\frac{1}{2}}, u(x_i, t_{j+\frac{1}{2}}), u_{t_{j+\frac{1}{2}}}^i(x_i, \cdot)) - f(x_i, t_{j+\frac{1}{2}}, w^i(t_j + \frac{\Delta}{2}), w_{t_j+\frac{\Delta}{2}}^i(\cdot)). \quad (2.28)$$

Из (2.20),(2.27),(2.28) и утверждения леммы 5 вытекает утверждение данной леммы.  $\square$

#### 2.4.1 Общая разностная схема с последствием

Перепишем метод (2.22) в виде

$$(I - \frac{d\Delta}{2}\delta_{\alpha,x})u_{j+1}^i = (I + \frac{d\Delta}{2}\delta_{\alpha,x})u_j^i + \Delta f_{j+\frac{1}{2}}^i, \quad (2.29)$$

$I$  — единичный оператор.

Для того, чтобы свести (2.29) к общей разностной схеме систем с последствием [11], введем  $y_j = (u_j^1, u_j^2, \dots, u_j^{N-1}) \in Y$ ,

$$\|y_j\|_Y = \max_{1 \leq i \leq N-1} |u_j^i|.$$

Тогда (2.29) может быть переписан в виде

$$(E - A)y_{j+1} = (E + A)y_j + \Delta F_{j+\frac{1}{2}}, \quad (2.30)$$

где элементы матрицы  $A$  размера  $(N-1) \times (N-1)$  имеют вид

$$A_{ij} = \begin{cases} \sigma g_{\alpha, i-j+1} & j \leq i-1, \\ \sigma g_{\alpha, 1} & j = i, \\ \sigma g_{\alpha, 0} & j = i+1, \\ 0 & j > i+1, \end{cases}$$

$\sigma = \frac{d\Delta}{2h^\alpha}$ ,  $E$  — единичная матрица,  $F_{j+\frac{1}{2}} = (f_{j+\frac{1}{2}}^1, f_{j+\frac{1}{2}}^2, \dots, f_{j+\frac{1}{2}}^{N-1})$

Так как матрица  $E - A$  обратима [156], это уравнение может быть переписано в виде

$$y_{j+1} = Sy_j + \Delta\Phi(t_j, I(\{y_k\}_j)), \quad (2.31)$$

$S = (E - A)^{-1}(E + A)$ ,  $\Phi(t_j, I(\{y_k\}_j)) = (E - A)^{-1}F_{j+\frac{1}{2}}$ ,  $I$  — оператор кусочно-линейной интерполяции с экстраполяцией продолжением.

#### 2.4.2 Теоремы устойчивости и сходимости

Начнем со следующего утверждения

**Лемма 7.** *Если  $1 < \alpha < 2$ , тогда все собственные числа  $\lambda$  матрицы  $S = (E - A)^{-1}(E + A)$  удовлетворяют условию  $|\lambda| < 1$ .*

*Доказательство.* В соответствии с теоремой Грешгорина ([73] с. 135-136), собственные числа матрицы  $A$  лежат в кругах в центрами в каждом диагональном элементе  $A_{i,i} = \sigma g_{\alpha,1} = -\sigma\alpha$ , радиуса  $r_i = \sum_{j=0, j \neq i}^{i+1} g_{\alpha, i-j+1} < \sigma\alpha$ . Эти круги Грешгорина лежат внутри левой части комплексной плоскости. Поэтому собственные числа матрицы  $A$  имеют отрицательные вещественные части.

Далее число  $\lambda$  является собственным числом матрицы  $A$  тогда и только тогда, когда  $(1 - \lambda)$  является собственным числом матрицы  $(E - A)$ , и тогда и только тогда, когда  $(1 + \lambda)/(1 - \lambda)$  является собственным числом матрицы  $S$ . Заметим, что все собственные числа матрицы  $(E - A)$  имеют величину модуля меньшую, чем 1 и, таким образом, эта матрица обратима. Кроме того, нетрудно проверить, что  $|\frac{1+\lambda}{1-\lambda}| < 1$ , поэтому спектральный радиус матрицы  $S$  меньше единицы.  $\square$

Опираясь на лемму 7, в соответствии с [142, 156], получаем следующую теорему устойчивости

**Теорема 4.** *Дробный метод Кранка-Никольсон, с использованием сдвинутой аппроксимации Грюнвальда, примененный к дробному по пространству уравнению диффузии с функциональным запаздыванием (2.19) (или переписанный в виде (2.31)) является безусловно устойчивым при  $1 < \alpha < 2$ .*

Из теоремы 4 вытекает для подчиненной операторной нормы

$$\|S^n\| \leq \hat{S}, \quad (2.32)$$

для любой натуральной степени  $n$ .

К схеме (2.31) применим основной результат общей теории численных методов решения эволюционных уравнений с наследственностью, теорему о порядке сходимости [11]. Так как



в описанной выше схеме (2.31) есть особенности, приведем этот результат с полным доказательством.

**Теорема 5.** Пусть выполняются условия устойчивости (2.32), функция  $\Phi$  удовлетворяет условию липшицевости по второму аргументу, оператор интерполирования  $I$  удовлетворяет условию липшицевости, невязка с интерполяцией имеет порядок  $\Delta^{p_1} + h^{p_2}$ , тогда метод (2.31) сходится с порядком сходимости  $\Delta^{p_1} + h^{p_2}$ .

*Доказательство.* Введем вектор точных значений

$z_j = (u(x_1, t_j), u(x_2, t_j), \dots, u(x_{N-1}, t_j)) \in Y$  и заметим, что  $\gamma_n = z_n - y_n$ ,  $n = -m, \dots, M$ . Тогда для  $n = 0, \dots, M-1$ , получаем

$$\gamma_{n+1} = S\gamma_n + \Delta\hat{\gamma}_n + \Delta\nu_n, \quad (2.33)$$

где

$$\hat{\gamma}_n = \Phi(t_n, I(\{z_i\}_n)) - \Phi(t_n, I(\{y_i\}_n)).$$

Здесь

$$\nu_n = (z_{n+1} - Sz_n)/\Delta - \Phi(t_n, I(\{z_i\}_n)), \quad n = 0, \dots, M-1$$

— вектор невязки с интерполяцией  $\nu_j = (\nu_j^1, \nu_j^2, \dots, \nu_j^{N-1})$ .

Из предположений о липшицевости отображений  $\Phi$  и  $I$  следует

$$\|\hat{\gamma}_n\| \leq L \max_{n-m \leq i \leq n} \{\|\nu_i\|\}, \quad (2.34)$$

где  $L = L_\Phi L_I$ ,  $L_\Phi$  — константа липшица функции  $\Phi$  по второму аргументу,  $L_I$  — константа липшица оператора  $I$ .

Заметим, что в случае описываемого метода  $L_\Phi = \|(E-A)^{-1}\|L_f$ , оператор кусочно-линейной интерполяции с экстраполяцией продолжением на отрезок длиной  $\Delta/2$  имеет константу липшица  $L_I = 2$ . Также заметим, что  $\gamma_0 = 0$ , так как стартовые значения метода равны точным значениям, в отличие от общей схемы [11]. Из (2.33) вытекает

$$\gamma_{n+1} = S^{n+1}\gamma_0 + \Delta \sum_{j=0}^n S^{n-j}\hat{\gamma}_j + \Delta \sum_{j=0}^n S^{n-j}\nu_j. \quad (2.35)$$

Из (2.35), (2.34) и (2.32) получаем

$$\|\gamma_{n+1}\| \leq \hat{S}L\Delta \sum_{j=0}^n \max_{j-m \leq i \leq j} \{\|\gamma_i\|\} + \hat{S}T \max_{0 \leq i \leq N-1} \{\|\nu_i\|\}. \quad (2.36)$$

Мы используем обозначения

$$R = \max_{0 \leq i \leq N-1} \{\|\nu_i\|\}, \quad D = \hat{S}TR. \quad (2.37)$$

Перепишем оценку (2.36) в виде

$$\|\delta_{n+1}\| \leq \hat{S}L\Delta \sum_{j=0}^n \max_{j-m \leq i \leq j} \{\|\delta_i\|\} + D. \quad (2.38)$$

Опираясь на (2.38), индукцией по  $n = 1, \dots, M$  докажем оценку

$$\|\delta_n\| \leq D(1 + \hat{S}L\Delta)^n, \quad n = 1, \dots, M. \quad (2.39)$$

*База индукции.* Если в (2.38) положить  $n = 0$ , то

$$\|\delta_1\| \leq \hat{S}L\|\delta_0\| + D \leq (1 + \hat{S}L\Delta)D.$$

*Шаг индукции.* Пусть оценка (2.39) верна для всех индексов от 1 до  $n$ . Покажем, что оценка справедлива и для  $n + 1$ . Зафиксируем  $j \leq n$ . Пусть  $i_0 = i_0(j)$  — тот индекс, на котором достигается

$$\max_{j-m \leq i \leq j} \{\|\delta_i\|\}.$$

Так как  $1 \leq i_0 \leq j$ , тогда по индуктивному предположению

$$\max_{j-m \leq i \leq j} \{\|\nu_i\|\} = \|\nu_{i_0}\| \leq D(1 + \hat{S}L\Delta)^{i_0} \leq D(1 + \hat{S}L\nu)^j.$$

Таким образом, выполняется оценка

$$\max_{j-m \leq i \leq j} \{\|\nu_i\|\} \leq D(1 + \hat{S}L\nu)^j.$$

Из полученной оценки и (2.38) вытекает

$$\|\nu_{n+1}\| \leq \hat{S}L\Delta \sum_{j=0}^n D(1 + \hat{S}L\Delta)^j + D = D(1 + \hat{S}L\Delta)^{n+1}.$$

Таким образом, оценка (2.39) доказана и из нее получаем оценку

$$\|\nu_n\| \leq D \exp(\hat{S}LT). \quad (2.40)$$

Так как по определению (2.37) величины  $D$  выполняется

$$D \leq C(\Delta^{p_1} + h^{p_2}),$$

то из (2.40) вытекает заключение теоремы. □

Как следствие теоремы 4, мы получаем следующий результат

**Замечание 1.** Если условия лемм 5–7 выполняются, то разностная схема (2.31) с кусочно-линейной интерполяцией и экстраполяцией продолжением сходится с порядком  $\Delta^2 + h$ .

## 2.5 Дробный метод Кранка-Никольсон для двухстороннего дробного уравнения диффузии с функциональным запаздыванием

Рассмотрим следующую начально-краевую задачу с функциональным запаздыванием для дробного по пространству уравнения диффузии порядка  $1 < \alpha \leq 2$  :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c_+(x) \frac{\partial^\alpha u}{\partial_+ x^\alpha} + c_-(x) \frac{\partial^\alpha u}{\partial_- x^\alpha} + f(x, t, u(x, t), u_t(x, \cdot)), \quad (2.41)$$

где  $x \in [0, X]$ ,  $t \in [t_0, T]$ ,  $c_+(x) > 0$ ,  $c_-(x) > 0$ ,  $u_t(x, \cdot) = \{u(x, t + s), -\tau \leq s < 0\}$  — функция предыстории,  $\tau > 0$  — величина запаздывания,

с начальными условиями

$$u(x, t) = \varphi(x, t), \quad x \in [0, X], \quad t \in [t_0 - \tau, t_0],$$

и граничными условиями

$$u(0, t) = 0, \quad u(X, t) = 0, \quad t \in [t_0, T].$$

### 2.5.1 Вывод разностной схемы

Проведем дискретизацию задачи. Будем использовать обозначения как в разделе 2.3.2. Пусть  $h = (X - x_0)/N$ , обозначим  $x_i = x_0 + ih$ ,  $i = 0, \dots, N$ , и  $\Delta = (T - t_0)/M$ ,  $t_j = t_0 + j\Delta$ ,  $j = 0, \dots, M$ . Пусть  $\tau/\Delta = m$  — положительное целое. Обозначим через  $u_j^i$  приближения функции  $u(x_i, t_j)$  в узлах.

Для каждого фиксированного  $i = 0, \dots, N$ , введем дискретную предысторию по времени в точках  $t_j$ ,  $j = 0, \dots, M$  :  $\{u_k^i\}_j = \{u_k^i, j - m \leq k \leq j\}$ . Мы будем использовать кусочно-линейную интерполяцию с экстраполяцией продолжением

$$v^i(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta}(u_l^i(t - t_{l-1}) + u_{l-1}^i(t_l - t)), & t_{l-1} \leq t \leq t_l, \quad 1 \leq l \leq j, \\ \frac{1}{\Delta}(u_j^i(t - t_{j-1}) + u_{j-1}^i(t_j - t)), & t_j \leq t \leq t_j + \Delta/2, \\ \varphi(x_i, t), & t_0 - \tau \leq t \leq t_0. \end{cases}$$

Используя сдвинутые формулы Грюнвальда для левой и правой производной по пространству, применяя обычную аппроксимацию для производной по времени и используя экстраполяцию предыстории дискретной функции, проведем дискретизацию (2.41) в узлах  $(x_i, t_{j+1/2})$  и получим аналог схемы Кранка-Никольсон

$$\frac{u_{j+1}^i - u_j^i}{\Delta} = \frac{1}{h^\alpha} \left( c_+^i \sum_{s=0}^{i+1} g_{\alpha,s} u_{j+1/2}^{i-s+1} + c_-^i \sum_{s=0}^{N-i+1} g_{\alpha,s} u_{j+1/2}^{i+s-1} \right) + f_{j+1/2}^i, \quad (2.42)$$

$$f_{j+1/2}^i = f(x_i, t_j + \frac{\Delta}{2}, v^i(t_j + \frac{\Delta}{2}), v_{t_j + \frac{\Delta}{2}}^i(\cdot)), \quad i = 1, \dots, N-1, \quad j = 0, \dots, M-1,$$

$$c_+^i = c_+(x_i), \quad c_-^i = c_-(x_i), \quad u_{j+1/2}^i = \frac{1}{2}(u_j^i + u_{j+1}^i),$$

с начальными и граничными условиями

$$u_0^i = \varphi(x_i, t_0), \quad v_j^i(t) = \varphi(x_i, t), \quad t < t_0, \quad i = 0, \dots, N,$$

$$u_j^0 = 0, \quad u_j^N = 0, \quad j = 0, \dots, M.$$

Определим

$$\delta_{\alpha,x}^+ u_j^i = \frac{c_+^i}{h^\alpha} \sum_{s=0}^{i+1} g_{\alpha,s} u_j^{i-s+1}, \quad \delta_{\alpha,x}^- u_j^i = \frac{c_-^i}{h^\alpha} \sum_{s=0}^{N-i+1} g_{\alpha,s} u_j^{i+s-1},$$

тогда (2.42) может быть переписано следующим образом

$$\frac{u_{j+1}^i - u_j^i}{\Delta} = \frac{1}{2} \left( \delta_{\alpha,x}^+ u_j^i + \delta_{\alpha,x}^+ u_{j+1}^i + \delta_{\alpha,x}^- u_j^i + \delta_{\alpha,x}^- u_{j+1}^i \right) + f_{j+\frac{1}{2}}^i. \quad (2.43)$$

Заметим, что если  $\alpha = 2$ ,  $c(x) = c_+(x) + c_-(x)$ , мы получаем схему Кранка-Никольсон для уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами и с функциональным запаздыванием, так как

$$\delta_{2,x} u_j^i = \delta_{\alpha,x}^+ u_j^i + \delta_{\alpha,x}^- u_j^i = \frac{u_j^{i-1} - 2u_j^i + u_j^{i+1}}{h^2}$$

.

## 2.6 Устойчивость и сходимость предложенной двухсторонней разностной схемы

Невязкой (без интерполяции) метода (2.43) назовем сеточную функцию

$$\psi_j^i = \frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_j)}{\Delta} - \frac{1}{2} \left( \delta_{\alpha,x}^{\hat{+}} u(x_i, t_j) + \delta_{\alpha,x}^{\hat{+}} u(x_i, t_{j+1}) + \delta_{\alpha,x}^{\hat{-}} u(x_i, t_j) + \delta_{\alpha,x}^{\hat{-}} u(x_i, t_{j+1}) \right) - \hat{f}_{j+\frac{1}{2}}^i, \quad (2.44)$$

$$\delta_{\alpha,x}^{\hat{+}} u(x_i, t_j) = \frac{c_+^i}{h^\alpha} \sum_{s=0}^{i+1} g_{\alpha,s} u(x_{i-s+1}, t_j), \quad \delta_{\alpha,x}^{\hat{-}} u(x_i, t_j) = \frac{c_-^i}{h^\alpha} \sum_{s=0}^{N-i+1} g_{\alpha,s} u(x_{i+s-1}, t_j),$$

$$\hat{f}_{j+\frac{1}{2}}^i = f(x_i, t_{j+\frac{1}{2}}, u(x_i, t_{j+\frac{1}{2}}), u_{t_{j+\frac{1}{2}}}(x_i, \cdot)).$$

**Лемма 8.** Пусть точное решение  $u(x, t) \in C^{4,3}([x_0, X] \times [t_0, T])$ ; выполнены условия теоремы 3; производная решения по  $t$  дважды непрерывно дифференцируема по  $x$ , тогда невязка (без интерполяции) метода (2.42) имеет порядок  $\Delta^2 + h$ .

*Доказательство.* Применяя разложения тейлора, получаем

$$\frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_j)}{\Delta} = \frac{\partial u(x_i, t_{j+\frac{1}{2}})}{\partial t} + O_1, \quad |O_1| \leq C_1 \Delta^2. \quad (2.45)$$

Следуя работе [156], получаем

$$\delta_{\alpha,x}^{\hat{+}} u(x_i, t_j) = \frac{\partial^\alpha u(x_i, t_j)}{\partial x_+^\alpha} + O_2, \quad \delta_{\alpha,x}^{\hat{-}} u(x_i, t_{j+1}) = \frac{\partial^\alpha u(x_i, t_{j+1})}{\partial x_+^\alpha} + O_3, \quad |O_2| \leq C_2 h, \quad |O_3| \leq C_3 h,$$

и, аналогично,

$$\delta_{\alpha,x}^{\hat{-}} u(x_i, t_j) = \frac{\partial^\alpha u(x_i, t_j)}{\partial x_+^\alpha} + O_4, \quad \delta_{\alpha,x}^{\hat{-}} u(x_i, t_{j+1}) = \frac{\partial^\alpha u(x_i, t_{j+1})}{\partial x_-^\alpha} + O_5, \quad |O_4| \leq C_4 h, \quad |O_5| \leq C_5 h,$$

тогда

$$\delta_{\alpha,x}^{\hat{+}} u(x_i, t_j) + \delta_{\alpha,x}^{\hat{+}} u(x_i, t_{j+1}) = 2 \frac{\partial^\alpha u(x_i, t_{j+\frac{1}{2}})}{\partial x_+^\alpha} + O_2 + O_3 + O_6, \quad |O_6| \leq C_6 \Delta^2. \quad (2.46)$$

$$\delta_{\alpha,x}^{\hat{-}} u(x_i, t_j) + \delta_{\alpha,x}^{\hat{-}} u(x_i, t_{j+1}) = 2 \frac{\partial^\alpha u(x_i, t_{j+\frac{1}{2}})}{\partial x_-^\alpha} + O_4 + O_5 + O_7, \quad |O_7| \leq C_7 \Delta^2. \quad (2.47)$$

Подставляя (2.45), (2.46) и (2.47) в определение невязки (без интерполяции) (2.44) и, учитывая, что  $u(x_i, t_{j+\frac{1}{2}})$  — точное решение уравнения (2.41), получаем утверждение леммы.  $\square$

Для каждого фиксированного  $i = 0, \dots, N$  введем дискретную предысторию точного решения для точек  $t_j$ ,  $j = 0, \dots, M$ :  $\{u(x_i, t_k)\}_j = \{u(x_i, t_k), j-m \leq k \leq j\}$ . Будем использовать кусочно-линейную интерполяцию с экстраполяцией продолжением точного решения

$$w^i(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta}(u(x_i, t_l)(t - t_{l-1}) + u(x_i, t_{l-1})(t_l - t)), & t_{l-1} \leq t \leq t_l, \quad 1 \leq l \leq j, \\ \frac{1}{\Delta}(u(x_i, t_j)(t - t_{j-1}) + u(x_i, t_{j-1})(t_j - t)), & t_j \leq t \leq t_j + \Delta/2, \\ \varphi(x_i, t), & t_0 - \tau \leq t \leq t_0. \end{cases}$$

Невязкой (с интерполяцией) метода (2.43) назовем следующую сеточную функцию

$$\nu_j^i = \frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_j)}{\Delta} - \frac{1}{2} \left( \delta_{\alpha,x}^{\hat{+}} u(x_i, t_j) + \delta_{\alpha,x}^{\hat{+}} u(x_i, t_{j+1}) + \delta_{\alpha,x}^{\hat{-}} u(x_i, t_j) + \delta_{\alpha,x}^{\hat{-}} u(x_i, t_{j+1}) \right) - \check{f}_{j+\frac{1}{2}}^i, \quad (2.48)$$

$$\check{f}_{j+\frac{1}{2}}^i = f(x_i, t_{j+\frac{1}{2}}), w^i(t_j + \frac{\Delta}{2}), w_{t_j+\frac{\Delta}{2}}^i(\cdot)$$

**Лемма 9.** *Предположим, что условия леммы 8 выполнены, тогда невязка метода (2.43) с кусочно-линейной интерполяцией и экстраполяцией продолжением имеет порядок  $\Delta^2 + h$ .*

Доказательство проводится аналогично доказательству леммы 6.

### 2.6.1 Вложение схемы для двухстороннего уравнения дробной диффузии в общую разностную схему

Перепишем метод (2.43) в виде

$$(I - \frac{\Delta}{2}(\delta_{\alpha,x}^+ + \delta_{\alpha,x}^-))u_{j+1}^i = (I + \frac{\Delta}{2}(\delta_{\alpha,x}^+ + \delta_{\alpha,x}^-))u_j^i + \Delta f_{j+\frac{1}{2}}^i. \quad (2.49)$$

Для того, чтобы свести этот метод к общей схеме систем с наследственностью как в работе [11], введем вектор  $y_j = (u_j^1, u_j^2, \dots, u_j^{N-1}) \in Y$ , где  $Y$  — векторное пространство с нормой

$$\|y_j\|_Y = \max_{1 \leq i \leq N-1} |u_j^i|.$$

Тогда (2.49) может быть переписано в виде

$$(E + A)y_{j+1} = (E - A)y_j + \Delta F_{j+\frac{1}{2}}, \quad (2.50)$$

где элементы матрицы  $A$  размерности  $N - 1 \times N - 1$  имеют вид

$$A_{ij} = \begin{cases} -(\xi_i + \eta_i)g_{\alpha,1} & j = i, \\ -(\xi_i g_{\alpha,2} + \eta_i g_{\alpha,0}) & j = i - 1, \\ -(\xi_i g_{\alpha,0} + \eta_i g_{\alpha,2}) & j = i + 1, \\ -\xi_i g_{\alpha,i-j+1} & j < i - 1, \\ -\xi_i g_{\alpha,j-i+1} & j > i + 1, \end{cases}$$

$E$  — единичная матрица,  $\xi_i = \frac{c_i^+ \Delta}{2h^\alpha}$ ,  $\eta_i = \frac{c_i^- \Delta}{2h^\alpha}$ ,  $F_{j+\frac{1}{2}} = (f_{j+\frac{1}{2}}^1, f_{j+\frac{1}{2}}^2, \dots, f_{j+\frac{1}{2}}^{N-1})$ .

**Лемма 10.** [137]

*Коэффициенты  $g_{\alpha,s}$  удовлетворяют следующим свойствам*

$$g_{\alpha,0} = 1, \quad g_{\alpha,1} = -\alpha, \quad 1 \geq g_{\alpha,2} \geq g_{\alpha,3} \geq \dots \geq 0, \\ \sum_{s=0}^{\infty} g_{\alpha,s} = 0, \quad \sum_{s=0}^m g_{\alpha,s} \leq 1, \quad m \geq 1.$$

**Лемма 11.** *Матрица  $E + A$  обратима.*

*Доказательство.* Из вида элементов матрицы  $A$  и утверждения предыдущей леммы следует, что

$$a_{i,i} - \sum_{j=1, i \neq j}^{N-1} |a_{i,j}| = -(\xi_i + \eta_i)g_{\alpha,1} - \xi_i \sum_{s=0, s \neq 1}^i g_{\alpha,s} - \eta_i \sum_{s=0, s \neq 1}^{N-i} g_{\alpha,s} \geq \\ \geq -(\xi_i + \eta_i)g_{\alpha,1} - (\xi_i + \eta_i) \sum_{s=0, s \neq 1}^{\infty} g_{\alpha,s} = -(\xi_i + \eta_i)g_{\alpha,1} + (\xi_i + \eta_i)g_{\alpha,1} = 0. \quad (2.51)$$

Эти неравенства (2.51) показывают, что матрица  $A$  имеет нестрогое диагональное преобладание, а матрица  $E + A$  имеет строгое диагональное преобладание и невырождена. Также можно заметить, что если  $\alpha$  не является целым, неравенства (2.51) строгие и матрица  $A$  имеет строгое диагональное преобладание.  $\square$

Так как матрица  $E + A$  обратима, уравнение (2.49) может быть переписано в виде

$$y_{j+1} = S y_j + \Delta \Phi(t_j, I(\{y_k\}_j)), \quad (2.52)$$

$S = (E + A)^{-1}(E - A)$ ,  $\Phi(t_j, I(\{y_k\}_j)) = (E + A)^{-1}F_{j+\frac{1}{2}}$ ,  $I$  — оператор кусочно-линейной интерполяции с экстраполяцией продолжением.

## 2.6.2 Теоремы устойчивости и сходимости для двухсторонних разностных схем

Предварительно рассмотрим следующее утверждение

**Лемма 12.** *Если  $1 < \alpha < 2$ , тогда все собственные значения  $\lambda$  матрицы  $S = (E + A)^{-1}(E - A)$  удовлетворяют условию  $|\lambda(S)| < 1$ .*

*Доказательство.* Пусть  $\lambda$  — собственное число матрицы  $A$ . Так как  $\alpha$  не является целым числом,  $A$  является матрицей со строгим диагональным преобладанием и невырожденной. Поскольку  $g_{\alpha,1} = -\alpha$  и  $\xi_i + \eta_i$  принимают положительные значения, тогда все диагональные элементы матрицы  $A$  положительны. В соответствии с теоремой Грешгорина [73, с. 135], получаем, что вещественные части собственных значений все положительны. Это означает, что  $|1 + \lambda| > |1 - \lambda|$ ,  $|\frac{1-\lambda}{1+\lambda}| < 1$ , тогда  $|\lambda(S)| < 1$ .  $\square$

В соответствии с [73] и леммой (12), мы можем сформулировать следующую теорему устойчивости

**Теорема 6.** *Дробный метод Кранка-Никольсон с использованием сдвинутых формул Грюнвальда, примененный к двухстороннему уравнению дробной диффузии с функциональным запаздыванием (2.41) и имеющий общее выражение (2.52) является безусловно устойчивым для  $1 < \alpha < 2$ .*

Из леммы 12 следует, что существует константа  $\hat{S}$ , такая, что

$$\|S^n\| \leq \hat{S}, \quad (2.53)$$

для любого натурального  $n$ .

Применим к методу (2.52) общую теорему 5, получим следующий результат

**Теорема 7.** *При условиях лемм 8 – 12 метод (2.43) с кусочно-линейной интерполяцией и экстраполяцией продолжением имеет порядок сходимости  $\Delta^2 + h$ .*

## 2.7 Численные эксперименты

Рассмотрим следующее одностороннее уравнение с дробной производной по пространству с переменным запаздыванием по времени

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - d \frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial x^\alpha} = \frac{-\exp(-t)(x - 0.5)^3}{\ln(\exp(-t/2)(x - 0.5)^3)} \left( 1 - \frac{d\Gamma(4)}{\Gamma(4 - \alpha)(x - 0.5)^\alpha} \right) \ln(u(x, t - t/2)), \quad (2.54)$$

с начальными и граничными условиями вида

$$u(x, r) = \exp(-r)(x - 0.5)^3, \quad 0.5 \leq r \leq 1, \quad 0.5 \leq x \leq 2,$$

Табл. 2.1: Максимальная норма погрешности в зависимости от шага по пространству и порядок сходимости

| h       | $\alpha = 1.9$ |           | $\alpha = 1.5$ |           |
|---------|----------------|-----------|----------------|-----------|
|         | $E(\Delta, h)$ | $order_s$ | $E(\Delta, h)$ | $order_s$ |
| 15/100  | 0.00385        |           | 0.0253         |           |
| 15/200  | 0.00194        | 0.9663    | 0.0128         | 0.9839    |
| 15/400  | 0.00098        | 0.9867    | 0.0064         | 1.003     |
| 15/800  | 0.00049        | 0.9974    | 0.0032         | 0.9987    |
| 15/1600 | 0.00024        | 0.9998    | 0.0015         | 0.9994    |

Табл. 2.2: Максимальная норма погрешности в зависимости от шага по времени и порядок сходимости

| $\Delta$ | $\alpha = 1.9$ |           | $\alpha = 1.5$ |           |
|----------|----------------|-----------|----------------|-----------|
|          | $e(\Delta, h)$ | $order_t$ | $e(\Delta, h)$ | $order_t$ |
| 4/64     | 0.0079         |           | 0.013          |           |
| 4/128    | 0.0019         | 1.988     | 0.0033         | 1.978     |
| 4/256    | 0.0005         | 1.999     | 0.0008         | 1.984     |
| 4/512    | 0.0001         | 2.000     | 0.0002         | 1.997     |
| 4/1024   | 0.00003        | 2.000     | 0.00005        | 1.999     |

$$u(0.5, t) = 0, \quad u(2, t) = 3.375 \exp(-t), \quad 1 \leq t \leq 5.$$

Точным решением является функция  $u(x, t) = \exp(-t)(x - 0.5)^3$ .

Протестируем изменение погрешности и порядок сходимости в зависимости от уменьшения шага по пространству  $h$  с величины  $\frac{15}{100}$  до величины  $\frac{15}{1600}$  при фиксированном шаге по времени  $\Delta = \frac{4}{4096}$ ,  $d = 0.2$ . Для этого введем

$$E(\Delta, h) = \max_{1 \leq i \leq N} | u(x_i, t_M) - u_i^M |$$

где  $u(x_i, t_M)$  — точное решение в узлах сетки  $(x_i, t_M)$ . Порядок сходимости относительно пространственного шага вычисляется по формуле  $order_s = \log_2 \left( \frac{E(\Delta, 2h)}{E(\Delta, h)} \right)$ ,  $d = 0.2$ , результаты представлены в таблице 2.1. Для того, чтобы проследить зависимость погрешности от шага по времени, будем менять  $\Delta$  с  $\frac{4}{64}$  до  $\frac{4}{1024}$  при фиксированном  $h = \frac{1.5}{2000}$ . Определим величину

$$e(\Delta, h) = \max_{0 \leq j \leq M-1} | u(x_N, t_j) - u_N^j |,$$

где  $u(x_N, t_j)$  — точное решение в точках  $(x_N, t_j)$  сетки. Порядок сходимости относительно временного шага вычисляется по формуле  $order_t = \log_2 \left( \frac{e(2\Delta, h)}{e(\Delta, h)} \right)$ , результаты приводятся в таблице 2.2. Из этих таблиц, мы можем сделать вывод, что численные результаты подтверждают теоретические результаты.

Рассмотрим следующее двухстороннее уравнение с дробной производной по пространству



Табл. 2.3: Максимальная норма погрешности в зависимости от шага по пространству и порядок сходимости.

| h     | $\alpha = 1.1$ |           | $\alpha = 1.9$ |           |
|-------|----------------|-----------|----------------|-----------|
|       | $E(\Delta, h)$ | $order_s$ | $E(\Delta, h)$ | $order_s$ |
| 1/20  | 0.00497        |           | 0.0027         |           |
| 1/40  | 0.00252        | 0.9752    | 0.0014         | 0.9865    |
| 1/80  | 0.00127        | 0.9887    | 0.0007         | 0.9984    |
| 1/160 | 0.00064        | 0.9996    | 0.0003         | 0.9997    |
| 1/320 | 0.00032        | 0.9999    | 0.0002         | 1.0002    |

с переменным запаздыванием по времени

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = (x - 1/2)^\alpha \frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial x_+^\alpha} + (3/2 - x)^\alpha \frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial x_-^\alpha} + f, \quad (2.55)$$

$$f = -\frac{\exp(-t)}{\ln(\exp(-t/2)(x-1/2)^3(3/2-x)^3)} \left( (x-1/2)^3(3/2-x)^3 + \frac{\Gamma(4)}{\Gamma(4-\alpha)}(x-1/2)^3(3/2-x)^3 - \frac{3\Gamma(5)}{\Gamma(5-\alpha)}(x-1/2)^4(3/2-x)^4 + \frac{3\Gamma(6)}{\Gamma(6-\alpha)}(x-1/2)^5(3/2-x)^5 - \frac{\Gamma(7)}{\Gamma(7-\alpha)}(x-1/2)^6(3/2-x)^6 \right) \ln(u(x, t - t/2)),$$

где  $1/2 \leq x \leq 3/2$ ,  $1 \leq t \leq 5$ ,  $\alpha$  — постоянная, такая, что  $1 < \alpha < 2$ ,

с начальными и граничными условиями вида

$$u(x, r) = \exp(-r)(x - 1/2)^3(3/2 - x)^3, \quad 1/2 \leq r \leq 1, \quad 1/2 \leq x \leq 3/2,$$

$$u(1/2, t) = 0, \quad u(3/2, t) = 0, \quad 1 \leq t \leq 5.$$

Точным решением является функция  $u(x, t) = \exp(-t)(x - 1/2)^3(3/2 - x)^3$ .

Определим максимальную погрешность соотношением

$$E(\Delta, h) = \max_{\substack{0 \leq i \leq N \\ 0 \leq j \leq M}} |u(x_i, t_j) - u_j^i|,$$

где  $u(x_i, t_j)$  — точное решение в узлах  $(x_i, t_j)$ . Протестируем изменение погрешности и порядок сходимости в зависимости от уменьшения шага по пространству  $h$  с величины  $\frac{1}{20}$  до величины  $\frac{1}{320}$  при фиксированном шаге по времени  $\Delta = \frac{4}{1024}$ . Порядок сходимости относительно пространственного шага дается формулой  $order_s = \log_2 \left( \frac{E(\Delta, 2h)}{E(\Delta, h)} \right)$ , результаты приведены в таблице 2.3. Для того, чтобы проследить зависимость погрешности от шага по времени, будем менять  $\Delta$  с  $\frac{1}{16}$  до  $\frac{1}{256}$  при фиксированном  $h = \frac{1}{4000}$ . Результаты численного эксперимента приведены в таблице 2.4. Из этих таблиц, мы можем сделать вывод, что численные результаты подтверждают теоретические результаты.

## 2.8 Заключение

Дробные аналоги метода Кранка-Никольсон сконструированы для одностороннего и двухстороннего дробного по пространству уравнения диффузии с функциональным запаздыва-

Табл. 2.4: Максимальная норма погрешности в зависимости от шага по времени и порядок сходимости.

| $\Delta$ | $\alpha = 1.1$ |           | $\alpha = 1.9$       |           |
|----------|----------------|-----------|----------------------|-----------|
|          | $E(\Delta, h)$ | $order_t$ | $E(\Delta, h)$       | $order_t$ |
| 1/16     | 0.0054         |           | 0.0022               |           |
| 1/32     | 0.0014         | 1.979     | 0.0005               | 1.988     |
| 1/64     | 0.0003         | 1.985     | 0.0001               | 1.993     |
| 1/128    | 0.00008        | 1.996     | 0.00003              | 1.999     |
| 1/256    | 0.000002       | 1.999     | $8.7 \times 10^{-6}$ | 2.001     |

нием. Методы основаны на идее отделения текущего состояния и функции-предыстории. Для учета функции-предыстории мы вводим кусочно-линейную интерполяцию дискретной предыстории и её экстраполяцию продолжением. Показана безусловная устойчивость методов. Доказаны теоремы сходимости, при этом используется техника доказательств подобных утверждений для функционально-дифференциальных уравнений и методы общей теории разностных схем. Численные примеры с переменным запаздыванием показывают хорошую согласованность теоретических результатов и результатов численных экспериментов.

## Глава 3

# Численный метод для дробного по времени уравнения диффузии с постоянным запаздыванием

### 3.1 Введение

В последнее время повышенное внимание в исследованиях уделяется уравнениям в частных производных, которые содержат дробные производные и интегралы по времени (FPDE). Причиной этого является их способность смоделировать некоторые явления более эффективно, чем уравнения в частных производных с производными целого порядка, поэтому, FPDE используются во многих областях науки. В наше время усилился интерес ученых к FPDE в таких областях науки и техники, как аномальный механизм диффузии, например, поток жидкости в пористых материалах [44], проблема охраны подземной окружающей среды [86], аномальный транспорт в биологии [87] и в финансах [138, 146], вязкоупругость [36] и т.д.

Запаздывание по времени рассматривалась в многочисленных математических моделях, например, в физиологических системах [39], в популяционной динамике [113, 161], в моделях ВИЧ-инфекции [57, 168].

Некоторый теоретический анализ дробных дифференциальных уравнений с запаздыванием по времени был проведен в [103]. Другие результаты, сконцентрированные около вопросов существования решения и аттракторов для класса нелинейных дробных дифференциальных уравнений, были представлены в [54].

Разностные схемы применялись ранее для численного решения различного сорта дифференциальных уравнений [29, 56, 104]. Численные решения для разных классов дифференциальных уравнений с запаздываниями были рассмотрены путем использования конечно-разностных и других методов в [40, 89, 143]. В работе [74] были получены энергетические

оценки для уравнения реакции-диффузии с запаздыванием, автор рассматривал неявную схему Эйлера и получил порядок  $O(\tau + h^2)$  в норме  $L_2$ . Zhang and Sun [176] ввели линеаризованную компактную разностную схему для класса уравнений в частных производных с нелинейным запаздыванием с начальными условиями и граничными условиями типа Дирихле. В работе [96], авторы применяли аппроксимацию для дробных производных Капуто с дробным порядком  $0 < \alpha < 1$  в точках  $t_{k+1/2}$ . Они модифицировали метод Кранка-Никольсон для дробной производной и получили порядок сходимости  $O(\tau^{2-\alpha} + h^2)$ .

Численные решения для уравнения теплопроводности с запаздыванием в случае переменного коэффициента теплопроводности были предложены в [104].

Во многих инженерных, биологических и физических процессах с аномальной диффузией [147, 167] были рассмотрены модели вида

$$\frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial t^\alpha} = K \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + f(x, t, u(x, t)). \quad (3.1)$$

Если  $0 < \alpha < 1$ , уравнение (3.48) является дробным по времени уравнением диффузии, если  $1 < \alpha < 2$  оно является дробным волновым уравнением. В случае, когда  $\alpha = 1$ , мы получаем классическое уравнение диффузии, в случае, когда  $\alpha = 2$  мы получаем классическое волновое уравнение.

Некоторые численные методы для различных видов уравнения (3.48) были рассмотрены в различных работах, таких, как [123, 141]. Конечно-разностные схемы для полулинейного дробного по пространству с запаздыванием по времени возникали в [84].

Мы будем рассматривать конструкции линеаризованной разностной схемы для уравнения (3.48) в которое введено постоянное запаздывание по времени, более точно, мы рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial t^\alpha} = K \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + f(x, t, u(x, t), u(x, t - s)), \quad (3.2a)$$

со следующими начальными и граничными условиями

$$u(x, t) = \psi(x, t), \quad 0 \leq x \leq L, \quad t \in [-s, 0], \quad (3.2b)$$

$$u(0, t) = \phi_0(t), \quad u(L, t) = \phi_L(t), \quad t > 0, \quad (3.2c)$$

где  $s > 0$  — величина запаздывания,  $K$  — положительная постоянная. Дробная производная понимается в смысле Капуто [127], то есть

$${}_0^C D_t^\alpha u(x, t) \equiv \frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial t^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_0^t (t - \zeta)^{-\alpha} \frac{\partial u(x, \zeta)}{\partial \zeta} d\zeta, \quad 0 < \alpha < 1. \quad (3.3)$$

В этой главе мы предлагаем линеаризованную разностную схему высокого порядка для дробного по времени уравнения диффузии с запаздыванием. Основная проблема состоит в аппроксимации дробной производной по времени и нелинейной зависимости от функции с

запаздыванием. Всюду в этой главе, следуя [176], мы предположим, что функция  $f(x, t, \mu, \nu)$  и решение  $u(x, t)$  задачи (3.2) достаточно гладкие в следующем смысле:

- Пусть  $m$  — целое, удовлетворяющее  $ms \leq T < (m + 1)s$ , определим  $I_r = (rs, (r + 1)s)$ ,  $r = -1, 0, \dots, m - 1$ ,  $I_m = (ms, T)$ ,  $I = \bigcup_{q=-1}^m I_q$  и допустим, что  $u(x, t) \in C^{(6,2)}([0, L] \times (0, T])$ ,
  - Частные производные  $f_\mu(x, t, \mu, \nu)$  и  $f_\nu(x, t, \mu, \nu)$  непрерывны в  $\epsilon_0$ -окрестности решения.
- Определим

$$c_1 = \sup_{\substack{0 < x < L, 0 < t \leq T \\ |\epsilon_1| \leq \epsilon_0, |\epsilon_2| \leq \epsilon_0}} |f_\mu(x, t, u(x, t) + \epsilon_1, u(x, t - s) + \epsilon_2)|,$$

$$c_2 = \max_{\substack{0 < x < L, 0 < t \leq T \\ |\epsilon_1| \leq \epsilon_0, |\epsilon_2| \leq \epsilon_0}} |f_\nu(x, t, u(x, t) + \epsilon_1, u(x, t - s) + \epsilon_2)|.$$

Далее изложение построено следующим образом: в следующем разделе мы проводим вывод разностной схемы. Далее, в третьем разделе, обсуждается разрешимость, устойчивость и сходимость разностной схемы. Далее рассматриваются дифференциальные уравнения с дробно-распределенным порядком, для которых также выводятся разностные схемы и проводится их анализ. В последних разделах главы приведены численные примеры, которые иллюстрируют точность представленной схемы и подтверждают теоретические результаты. Глава заканчивается заключением и некоторыми замечаниями.

## 3.2 Вывод разностной схемы

Мы стремимся получить численное решение, основываясь на методе Кранка-Никольсон. Для дальнейшего зафиксируем обозначения. Возьмем два положительных целых числа  $M$  и  $n$ , пусть  $h = \frac{L}{M}$ ,  $\tau = \frac{s}{n}$ , обозначим  $x_i = ih$ ,  $t_k = k\tau$  и  $t_{k+1/2} = (k + \frac{1}{2})\tau = \frac{1}{2}(t_k + t_{k+1})$ . Покроем пространственно-временную область сеткой  $\Omega_{h\tau} = \Omega_h \times \Omega_\tau$ , где  $\Omega_h = \{x_i \mid 0 \leq i \leq M\}$ ,  $\Omega_\tau = \{t_k \mid -n \leq k \leq N\}$ ,  $N = \lfloor \frac{T}{\tau} \rfloor$ . Пусть  $\mathcal{W} = \{\nu \mid \nu = v_i^k, 0 \leq i \leq M, -n \leq k \leq N\}$  — пространство сеточных функций на  $\Omega_{h\tau}$ . Для  $\nu \in \mathcal{W}$  определим  $v_i^{k+1/2} = \frac{1}{2}(v_i^k + v_i^{k+1})$  и  $\delta_x^2 v_i^k = \frac{1}{h^2}(v_{i+1}^k - 2v_i^k + v_{i-1}^k)$ .

**Лемма 13.** [176] Пусть  $q(x) \in C^6[x_{i-1}, x_{i+1}]$ , тогда

$$\frac{1}{12}(q''(x_{i-1}) + 10q''(x_i) + q''(x_{i+1})) - \frac{1}{h^2}(q(x_{i-1}) - 2q(x_i) + q(x_{i+1})) = \frac{h^4}{240}q^{(6)}(\omega_i),$$

где  $\omega_i \in (x_{i-1}, x_{i+1})$ .

Определим сеточную функцию на  $\Omega_{h\tau}$ :  $U(i, k) = u(x_i, t_k)$  — точное решение в узлах В работе [96] была приведена аппроксимация для дробной производной Капуто в  $t_{k+1/2}$  с  $0 < \alpha < 1$ :

$$\frac{\partial^\alpha u(x_i, t_{k+1/2})}{\partial t^\alpha} = \omega_1 U_i^k + \sum_{m=1}^{k-1} (\omega_{k-m+1} - \omega_{k-m}) U_i^m - \omega_k U_i^0 + \frac{\sigma}{2^{1-\alpha}} (U_i^{k+1} - U_i^k) + O(\tau^{2-\alpha}), \quad (3.4)$$

где

$$\omega_i = \sigma \left( \left(i + \frac{1}{2}\right)^{1-\alpha} - \left(i - \frac{1}{2}\right)^{1-\alpha} \right), \quad (3.5)$$

$$\sigma = \frac{1}{\tau^\alpha \Gamma(2-\alpha)}, \quad 0 \leq i \leq M, \quad 0 \leq k \leq N-1. \quad (3.6)$$

Применим (3.4) к уравнению (3.2а) в точках  $(x_i, t_{k+1/2})$ , получим

$$\begin{aligned} \omega_1 U_i^k + \sum_{m=1}^{k-1} (\omega_{k-m+1} - \omega_{k-m}) U_i^m - \omega_k U_i^0 + \frac{\sigma}{2^{1-\alpha}} (U_i^{k+1} - U_i^k) + O(\tau^{2-\alpha}) \\ = K \frac{\partial^2 u(x_i, t_{k+1/2})}{\partial x^2} + f(x_i, t_{k+1/2}, u(x_i, t_{k+1/2}), u(x_i, t_{k+1/2} - s)). \end{aligned} \quad (3.7)$$

**Лемма 14.** Пусть для  $g = (g_0, g_1, \dots, g_M)$  определен линейный оператор  $\mathfrak{A}$  следующим образом

$$\mathfrak{A}g_i = \frac{1}{12}(g_{i-1} + 10g_i + g_{i+1}), \quad 1 \leq i \leq M-1.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} \left[ \omega_1 U_i^k + \sum_{m=1}^{k-1} (\omega_{k-m+1} - \omega_{k-m}) U_i^m - \omega_k U_i^0 + \frac{\sigma}{2^{1-\alpha}} (U_i^{k+1} - U_i^k) \right] = K \delta_x^2 U_i^{k+1/2} + \\ \mathfrak{A}f \left( x_i, t_{k+1/2}, \frac{3}{2}U_i^k - \frac{1}{2}U_i^{k-1}, \frac{1}{2}U_i^{k+1-n} + \frac{1}{2}U_i^{k-n} \right) + R_i^k, \end{aligned} \quad (3.8)$$

где

$$\left| R_i^{k+1/2} \right| = O(h^4 + \tau^{2-\alpha}), \quad 1 \leq i \leq M-1, \quad 0 \leq k \leq N-1. \quad (3.9)$$

*Доказательство.* Подставим тейлоровские разложения

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x_i, t_{k+1/2})}{\partial x^2} &= \left( \frac{\partial^2 u(x_i, t_k)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x_i, t_{k+1})}{\partial x^2} \right) + O(\tau^2), \\ u(x_i, t_{k+1/2}) &= U_i^{k+1/2} = \frac{3}{2}U_i^k - \frac{1}{2}U_i^{k-1} + O(\tau^2), \\ u(x_i, t_{k+1/2} - s) &= U_i^{k-n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}U_i^{k+1-n} + \frac{1}{2}U_i^{k-n} + O(\tau^2), \end{aligned}$$

в (3.7) и получим

$$\begin{aligned} \left[ \omega_1 U_i^k + \sum_{m=1}^{k-1} (\omega_{k-m+1} - \omega_{k-m}) U_i^m - \omega_k U_i^0 + \frac{\sigma}{2^{1-\alpha}} (U_i^{k+1} - U_i^k) \right] + O(\tau^{2-\alpha}) \\ = \frac{K}{2} \left( \frac{\partial^2 u(x_i, t_k)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x_i, t_{k+1})}{\partial x^2} \right) + f \left( x_i, t_{k+1/2}, \frac{3}{2}U_i^k - \frac{1}{2}U_i^{k-1}, \frac{1}{2}U_i^{k+1-n} + \frac{1}{2}U_i^{k-n} \right) + O(\tau^2), \end{aligned} \quad (3.10)$$

здесь мы использовали дифференцируемость  $f$  по третьему и четвертому аргументам.

В соответствии с леммой 13 получаем

$$\mathfrak{A} \frac{\partial^2 u(x_i, t_k)}{\partial x^2} = \delta_x^2 U_i^k + \frac{h^4}{240} \frac{\partial^6 u}{\partial x^6}(\theta_i^k, t_k), \quad \theta_i^k \in (x_{i-1}, x_{i+1}),$$

применяя  $\mathfrak{A}$  к (3.10) выводим

$$\begin{aligned} & \mathfrak{A} \left[ \omega_1 U_i^k + \sum_{m=1}^{k-1} (\omega_{k-m+1} - \omega_{k-m}) U_i^m - \omega_k U_i^0 + \frac{\sigma}{2^{1-\alpha}} (U_i^{k+1} - U_i^k) \right] \\ &= K \delta_x^2 U_i^{k+1/2} + \mathfrak{A} f \left( x_i, t_{k+1/2}, \frac{3}{2} U_i^k - \frac{1}{2} U_i^{k-1}, \frac{1}{2} U_i^{k+1-n} + \frac{1}{2} U_i^{k-n} \right) + O(\tau^{2-\alpha} + h^4) \end{aligned}$$

поскольку  $u(x, t) \in C^{(6,2)}([0, L] \times (0, T])$ .  $\square$

Окончательный вид разностной схемы получаем, пренебрегая  $R_i^{k+1/2}$ , заменяя в (3.8)  $U_i^k$  на  $u_i^k$

$$\begin{aligned} & \mathfrak{A} \left[ \omega_1 u_i^k + \sum_{m=1}^{k-1} (\omega_{k-m+1} - \omega_{k-m}) u_i^m - \omega_k u_i^0 + \frac{\sigma^l}{2^{1-\alpha_l}} (u_i^{k+1} - u_i^k) \right] \\ &= K \delta_x^2 u_i^{k+1/2} + \mathfrak{A} f \left( x_i, t_{k+1/2}, \frac{3}{2} u_i^k - \frac{1}{2} u_i^{k-1}, \frac{1}{2} u_i^{k+1-n} + \frac{1}{2} u_i^{k-n} \right), \quad (3.11a) \end{aligned}$$

и учитывая начальные и граничные условия

$$u_0^k = \phi_0(t_k), \quad u_M^k = \phi_L(t_k), \quad 1 \leq k \leq N, \quad (3.11b)$$

$$u_i^k = \psi(x_i, t_k), \quad 0 \leq i \leq M, \quad -n \leq k \leq 0. \quad (3.11c)$$

### 3.3 Анализ разностной схемы

Перед тем, как рассмотреть теоремы единственности, устойчивости и сходимости в норме  $L_\infty$  для предложенной разностной схемы с использованием дискретного энергетического метода, представим некоторые обозначения.

Покроем пространственный отрезок  $[0, L]$  сеткой  $\Omega_h = \{x_i \mid 0 \leq i \leq M, \}$  и пусть  $V_h = \{v \mid v = (v_0, \dots, v_M), \quad v_0 = v_M = 0\}$  — сеточная функция, определенная на  $\Omega_h$ . Для любых  $u, v \in V_h$ , введем внутреннее дискретное произведение и соответствующие нормы

$$\langle u, v \rangle = -h \sum_{i=1}^{M-1} (\mathfrak{A} u_i) (\delta_x^2 v_i) = h \sum_{i=1}^{M-1} (\delta_x u_{i+1/2}) (\delta_x v_{i+1/2}) - \frac{h^2}{12} h \sum_{i=1}^{M-1} (\delta_x^2 u_i) (\delta_x^2 v_i),$$

$$|u|_1^2 = h \sum_{i=1}^M (\delta_x u_{i-1/2})^2, \quad \|u\|^2 = h \sum_{i=1}^{M-1} (u_i)^2, \quad \|u\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq M-1} |u_i|.$$

Равенство (3.4) может быть переписано в следующем виде

$$\frac{\partial^\alpha u(x_i, t_{k+1/2})}{\partial t^\alpha} = \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \left[ a_{k-m+1}^\alpha u_{t,m-1} + a_0^\alpha u_{t,k} \right] + O(\tau^{2-\alpha}), \quad (3.12)$$

где  $a_0^\alpha = \left(\frac{1}{2}\right)^{1-\alpha}$ ,  $a_l^\alpha = (l+1/2)^{1-\alpha} - (l-1/2)^{1-\alpha}$ ,  $l \geq 1$ ,

тогда

$$\frac{\partial^\alpha u(x_i, t_{k+1/2})}{\partial t^\alpha} = \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{m=0}^k C_{k-m}^{(k+1)} u_{t,m}, \quad u_{t,m} = \frac{u_{m+1} - u_m}{\tau}, \quad (3.13)$$

где  $c_0^{(k+1)} = a_0^\alpha$  для  $j = 0$  и для  $j \geq 1$

$$C_m^{(k+1)} = \begin{cases} a_0^\alpha & m = 0, \\ a_m^\alpha & 1 \leq m \leq k-1, \\ a_k^\alpha & m = k; \end{cases}$$

Тогда, если  $0 < \alpha \leq 1$  и  $u(x, t) \in C^2[0, T]$ , то

$$\frac{\partial^\alpha u(x_i, t_{k+1/2})}{\partial t^\alpha} = \sum_{n=0}^k g_n^{(k+1)} [u(x_i, t_{n+1}) - u(x_i, t_n)] + O(\tau^{2-\alpha}) := \Delta_{t_{k+1/2}}^\alpha u + O(\tau^{2-\alpha}), \quad (3.14)$$

где  $g_n^{(k+1)} = \frac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} C_{k-n}^{(k+1)}$ .

**Лемма 15.** Для любых  $0 < \alpha < 1$ ,  $C_m^{(k+1)}$  ( $0 \leq m \leq k$ ,  $k \geq 1$ ), если  $3^\alpha \geq \frac{3}{2}$ , то

$$C_k^{(k+1)} > \frac{1-\alpha}{2} (k+1/2)^{-\alpha}, \quad (3.15)$$

$$C_0^{(k+1)} > C_1^{(k+1)} > \dots > C_{k-1}^{(k+1)} > C_k^{(k+1)}. \quad (3.16)$$

*Доказательство.* Для  $k \geq 1$  положим

$C_k^{(k+1)} = (1/2)^{1-\alpha} [(2k+1)^{1-\alpha} - (2k-1)^{1-\alpha}] > \frac{1-\alpha}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{-\alpha} \int_0^1 \frac{d\eta}{(2k+1-\eta)^\alpha} > \frac{1-\alpha}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{-\alpha} (2k+1)^{-\alpha} > \frac{1-\alpha}{2} \left(k + \frac{1}{2}\right)^{-\alpha}$ , а также  $C_0^{(k+1)} = (1/2)^{1-\alpha} > \frac{1-\alpha}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{-\alpha}$ , так что (3.15) будет выполняться. Также заметим, что  $C_1^{(k+1)} > \dots > C_{k-1}^{(k+1)} > C_k^{(k+1)}$ , потому что  $a_l^\alpha > a_{l+1}^\alpha$ ,  $l \geq 1$ . Таким образом, неравенство (3.16) выполняется, если  $a_0^\alpha \geq a_1^\alpha$ , что эквивалентно  $3^\alpha \geq \frac{3}{2}$ .  $\square$

**Лемма 16.** Из леммы 15 следует, что

$$g_k^{(k+1)} > g_{k-1}^{(k+1)} > \dots > g_1^{(k+1)} > g_0^{(k+1)}$$

и

$$g_0^{(k+1)} = \frac{\tau^{-\alpha} C_k^{(k+1)}}{\Gamma(2-\alpha)} \geq \frac{\frac{1-\alpha}{2} (k+1/2)^{-\alpha}}{\tau^\alpha \Gamma(2-\alpha)} \geq \frac{1-\alpha}{2T^\alpha \Gamma(2-\alpha)} = k_0.$$

В соответствие с [17, 176], для любого  $u \in V_h$  следующие неравенства выполняются

$$\frac{2}{3} |u|_1^2 \leq \langle u, u \rangle \leq |u|_1^2, \quad \|u\|_\infty \leq \frac{\sqrt{L}}{2} |u|_1, \quad \|u\|^2 \leq \frac{L}{6} |u|_1^2, \quad (3.17)$$

Из (3.17) непосредственно следует, что

$$\|u\|^2 \leq \frac{L^2}{4} \langle u, u \rangle, \quad \|u\|_\infty^2 \leq \frac{3L}{8} \langle u, u \rangle. \quad (3.18)$$

**Лемма 17.** Для любого  $v \in V_h$  справедливо следующее неравенство  $\mathfrak{A} \|v\|^2 \leq \|v\|^2$ .



**Лемма 18.** Для любых  $u, v \in V_h$  выполняется  $-h \sum_{i=1}^{M-1} (\delta_x^2 u_i) v_i = h \sum_{i=1}^M (\delta_x u_{i-1/2}) (\delta_x v_{i-1/2})$ .

**Лемма 19.** [Дискретное неравенство Гронцола [176]]

Предположим, что  $\{Z_k \mid k \geq 0\}$  и  $\{g_k \mid k \geq 0\}$  — неотрицательные последовательности, удовлетворяющие  $Z_{k+1} \leq A + \sum_{i=0}^k g_i Z_i$ ,  $k \geq 0$ , для некоторого неотрицательного  $A$ . Тогда  $Z_{k+1} \leq A \exp(\sum_{i=0}^k g_i)$ ,  $k \geq 0$ .

**Лемма 20.** Если  $\{g_k^{(k+1)} > g_{k-1}^{(k+1)} > \dots > g_0^{(k+1)} > 0, \quad k = 0, 1, \dots, M-1\}$ , тогда для любой функции  $\nu(t)$  определенной на узлах  $\{t_k : t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{M-1} < t_M = T\}$ , выполняются неравенства

$$\begin{aligned} \nu^{k+1} \Delta_{t_{k+1/2}}^\alpha \nu &\geq \frac{1}{2} \Delta_{t_{k+1/2}}^\alpha (\nu)^2 + \frac{1}{2g_k^{(k+1)}} (\Delta_{t_{k+1/2}}^\alpha \nu)^2, \\ \nu^k \Delta_{t_{k+1/2}}^\alpha \nu &\geq \frac{1}{2} \Delta_{t_{k+1/2}}^\alpha (\nu)^2 - \frac{1}{2(g_k^{(k+1)} - g_{k-1}^{(k+1)})} (\Delta_{t_{k+1/2}}^\alpha \nu)^2, \end{aligned}$$

**Лемма 21.** Если  $\{g_k^{(k+1)} > g_{k-1}^{(k+1)} > \dots > g_0^{(k+1)} > 0, \quad k = 0, 1, \dots, M-1\}$ , тогда для любой функции  $\nu(t)$  определенной на узлах  $\{t_k : t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{M-1} < t_M = T\}$  выполняется неравенство

$$\left(\frac{1}{2} \nu^{k+1} + \frac{1}{2} \nu^k\right) \Delta_{t_{k+1/2}}^\alpha \nu \geq \frac{1}{2} \Delta_{t_{k+1/2}}^\alpha (\nu)^2.$$

Начнем с доказательства того, что наша разностная схема имеет единственное решение. Затем мы покажем, это решение приближенно решает (3.2).

**Теорема 8.** Разностная схема (3.11) имеет единственное решение.

*Доказательство.* Предположим, что  $u_i^k$ ,  $0 \leq i \leq M$  — решение разностной схемы (3.11). Применим математическую индукцию по  $k$ . База индукции выполняется, так как решение  $u_i^k$  определено единственным образом для  $-n \leq k \leq 0$  из начальных условий (4.11b). Предположим, что  $u_i^k$  единственным образом определено, когда  $k \leq l$ , тогда из (3.11a) мы получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно  $u_i^{l+1}$ . Покажем, что матрица этой системы имеет строгое диагональное преобладание, тогда существует единственное решение  $u_i^{l+1}$ .

Мы можем представить систему (3.11) в следующем виде

$$\begin{aligned} &\left[\frac{\sigma}{2^{1-\alpha}} - \frac{K}{2h^2}\right] u_{i+1}^{k+1} + \left[\frac{10}{12} \frac{\sigma}{2^{1-\alpha}} + \frac{K}{h^2}\right] u_i^{k+1} + \left[\frac{1}{12} \frac{\sigma}{2^{1-\alpha}} - \frac{K}{2h^2}\right] u_{i-1}^{k+1} + \left[\frac{1}{12} \left(\omega_1 - \frac{\sigma}{2^{1-\alpha}}\right) - \frac{K}{2h^2}\right] u_{i+1}^k + \\ &\left[\frac{10}{12} \left(\omega_1 - \frac{\sigma}{2^{1-\alpha}}\right) + \frac{K}{h^2}\right] u_i^k + \left[\frac{1}{12} \left(\omega_1 - \frac{\sigma}{2^{1-\alpha}}\right) - \frac{K}{2h^2}\right] u_{i-1}^k + \mathfrak{A} \left( \sum_{m=1}^{k-1} (\omega_{k-m+1} - \omega_{k-m}) u_i^m - \omega_k u_i^0 \right) \\ &= \mathfrak{A} f \left( x_i, t_{k+1/2}, \frac{3}{2} u_i^k - \frac{1}{2} u_i^{k-1}, \frac{1}{2} u_i^{k+1-n} + \frac{1}{2} u_i^{k-n} \right). \end{aligned}$$

Матрица  $A = (a_{ij})$  имеет строгое диагональное преобладание, если

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|;$$

но

$$a_{ii} = \frac{10}{12} \frac{\sigma}{2^{1-\alpha}} + \frac{K}{h^2}, \quad a_{i+1,i} = \frac{1}{12} \frac{\sigma}{2^{1-\alpha}} - \frac{K}{2h^2} = a_{i-1,i}, \quad \frac{\sigma^l}{2^{1-\alpha}} > 0.$$

Таким образом, матрица невырожденная и этим доказывается теорема.  $\square$

**Теорема 9.** [Теорема сходимости]

Пусть  $u(x, t) \in C^{6,2}([0, L] \times (-s, T))$  – решение (3.2), такое, что  $u(x_i, t_k) = U_i^k$  и  $u_i^k$  ( $0 \leq i \leq M, -n \leq k \leq N$ ) – решение разностной схемы (3.11), обозначим  $e_i^k = U_i^k - u_i^k$ , для  $0 \leq i \leq M, -n \leq k \leq N$ , тогда, если

$$\tau \leq \tau_0 = \left(\frac{\epsilon_0}{4C}\right)^{\frac{1}{2-\alpha}}, \quad h \leq h_0 = \left(\frac{\epsilon_0}{4C}\right)^{\frac{1}{4}}, \quad (3.19)$$

то

$$\|e^k\|_\infty \leq \bar{C} (\tau^{2-\alpha} + h^4), \quad 0 \leq k \leq N, \quad (3.20)$$

где  $\bar{C}$  – положительная постоянная, независящая от  $h$  и  $\tau$ .

*Доказательство.* Разностные схемы в (3.8) и (3.11a), используя (3.14), могут быть переписаны в виде

$$\mathfrak{A} \left[ \sum_{n=0}^k g_n^{(k+1)} (U_i^{n+1} - U_i^n) \right] = K \delta_x^2 U_i^{k+1/2} + \mathfrak{A} f \left( x_i, t_{k+1/2}, \frac{3}{2} U_i^k - \frac{1}{2} U_i^{k-1}, \frac{1}{2} U_i^{k+1-n} + \frac{1}{2} U_i^{k-n} \right) + R_i^{k+1/2}, \quad (3.21)$$

$$\mathfrak{A} \left[ \sum_{n=0}^k g_n^{(k+1)} (u_i^{n+1} - u_i^n) \right] = K \delta_x^2 u_i^{k+1/2} + \mathfrak{A} f \left( x_i, t_{k+1/2}, \frac{3}{2} u_i^k - \frac{1}{2} u_i^{k-1}, \frac{1}{2} u_i^{k+1-n} + \frac{1}{2} u_i^{k-n} \right), \quad (3.22)$$

Уравнение для погрешности разностной схемы получается вычитанием (3.22) из (3.21), с последующей заменой  $u$  на  $U$ :

$$\mathfrak{A} \left[ \sum_{n=0}^k g_n^{(k+1)} (e_i^{n+1} - e_i^n) \right] = K \delta_x^2 e_i^{k+1/2} + R_i^{k+1/2} + \mathfrak{A} \left[ f \left( x_i, t_{k+1/2}, \frac{3}{2} U_i^k - \frac{1}{2} U_i^{k-1}, \frac{1}{2} U_i^{k+1-n} + \frac{1}{2} U_i^{k-n} \right) - f \left( x_i, t_{k+1/2}, \frac{3}{2} u_i^k - \frac{1}{2} u_i^{k-1}, \frac{1}{2} u_i^{k+1-n} + \frac{1}{2} u_i^{k-n} \right) \right], \quad (3.23)$$

и

$$e_0^k = 0, \quad e_M^k = 0, \quad 1 \leq k \leq N, \quad (3.24)$$

$$e_i^k = 0, \quad 0 \leq i \leq M, \quad -n \leq k \leq 0. \quad (3.25)$$

Умножая (3.23) на  $-h(\delta_x^2 e_i^{k+1/2})$  и суммируя по  $i$  от 1 до  $M-1$ , получаем

$$\begin{aligned} & -h \sum_{i=1}^{M-1} \mathfrak{A} \left[ \sum_{n=0}^k g_n^{(k+1)} (e_i^{n+1} - e_i^n) \right] \delta_x^2 e_i^{k+1/2} = -\frac{K}{\sigma} \|\delta_x^2 e_i^{k+1/2}\|^2 \\ & - \frac{h}{\sigma} \sum_{i=1}^{M-1} (R_i^{k+1/2}) \delta_x^2 e_i^{k+1/2} - \frac{h}{\sigma} \sum_{i=1}^{M-1} \mathfrak{A} \left[ f \left( x_i, t_{k+1/2}, \frac{3}{2} U_i^k - \frac{1}{2} U_i^{k-1}, \frac{1}{2} U_i^{k+1-n} + \frac{1}{2} U_i^{k-n} \right) \right. \\ & \quad \left. - f \left( x_i, t_{k+1/2}, \frac{3}{2} u_i^k - \frac{1}{2} u_i^{k-1}, \frac{1}{2} u_i^{k+1-n} + \frac{1}{2} u_i^{k-n} \right) \right] \delta_x^2 e_i^{k+1/2}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Докажем (3.20) с помощью математической индукции. База индукции очевидна: из (3.25) ясно, что  $\|e^k\|_\infty = 0$ ,  $-n \leq k \leq 0$ , так что в частности, имеем  $\|e^0\|_\infty = 0$ .

Далее, предположим, что (3.20) выполняется для  $0 \leq k \leq \ell$  и покажем, что (3.20) выполняется для  $k = \ell + 1$ .

Из индуктивной гипотезы, из предположения о том, что  $\tau$  и  $h$  удовлетворяют (3.19), получаем

$$\|e^k\|_\infty \leq C (\tau^{2-\alpha} + h^4) \leq \epsilon_0/2, \quad 0 \leq k \leq \ell. \quad (3.27)$$

Из (3.27) мы заключаем, что  $|e^k| \leq \epsilon_0/2$ ,  $0 \leq k \leq \ell$ , так, что  $|U_i^k - u_i^k| \leq \epsilon_0/2$ ,  $|U_i^{k-1} - u_i^{k-1}| \leq \epsilon_0/2$ ,  $0 \leq k \leq \ell$ , тогда  $|\frac{3}{2}(U_i^k - u_i^k) - \frac{1}{2}(U_i^{k-1} - u_i^{k-1})| \leq \epsilon_0/2$ , и следующее неравенство выполняется  $|\frac{3}{2}U_i^k - \frac{1}{2}U_i^{k-1} - (\frac{3}{2}u_i^k - \frac{1}{2}u_i^{k-1})| \leq \epsilon_0$ ,  $0 \leq i \leq M$ ,  $0 \leq k \leq \ell$ . Тем же способом получаем, что  $|\frac{1}{2}(U_i^{k+1-n} - u_i^{k+1-n}) + \frac{1}{2}(U_i^{k-n} - u_i^{k-n})| \leq \epsilon_0/2$ , тогда выполняется неравенство  $|\frac{1}{2}U_i^{k+1-n} + \frac{1}{2}U_i^{k-n} - (\frac{1}{2}u_i^{k+1-n} + \frac{1}{2}u_i^{k-n})| \leq \epsilon_0$ ,  $0 \leq i \leq M$ ,  $0 \leq k \leq \ell$ , Следовательно,

$$\begin{aligned} & \left| f \left( x_i, t_{k+1/2}, \frac{3}{2} U_i^k - \frac{1}{2} U_i^{k-1}, \frac{1}{2} U_i^{k+1-n} + \frac{1}{2} U_i^{k-n} \right) - f \left( x_i, t_{k+1/2}, \frac{3}{2} u_i^k - \frac{1}{2} u_i^{k-1}, \frac{1}{2} u_i^{k+1-n} + \frac{1}{2} u_i^{k-n} \right) \right| \leq \\ & c_1 \left| \frac{3}{2} e_i^k - \frac{1}{2} e_i^{k-1} \right| + c_2 \left| \frac{1}{2} e_i^{k+1-n} + \frac{1}{2} e_i^{k-n} \right|, \quad 0 \leq i \leq M, \quad 0 \leq k \leq \ell, \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} & \left| \mathfrak{A} \left[ f \left( x_i, t_{k+1/2}, \frac{3}{2} U_i^k - \frac{1}{2} U_i^{k-1}, \frac{1}{2} U_i^{k+1-n} + \frac{1}{2} U_i^{k-n} \right) - f \left( x_i, t_{k+1/2}, \frac{3}{2} u_i^k - \frac{1}{2} u_i^{k-1}, \frac{1}{2} u_i^{k+1-n} + \frac{1}{2} u_i^{k-n} \right) \right] \right| \\ & \leq \mathfrak{A} \left( c_1 \left| \frac{3}{2} e_i^k - \frac{1}{2} e_i^{k-1} \right| + c_2 \left| \frac{1}{2} e_i^{k+1-n} + \frac{1}{2} e_i^{k-n} \right| \right), \quad 0 \leq i \leq M, \quad 0 \leq k \leq \ell, \end{aligned} \quad (3.28)$$

Рассмотрим каждую часть (3.26) отдельно:

$$\eta_1 := -h \sum_{i=1}^{M-1} \mathfrak{A} \left[ \sum_{n=0}^k g_n^{(k+1)} (e_i^{n+1} - e_i^n) \right] \delta_x^2 e_i^{k+1/2} = \sum_{n=0}^k g_n^{(k+1)} \langle e^{n+1} - e^n, e^{k+1/2} \rangle, \quad (3.29)$$

используя лемму 21 в (3.29), получаем

$$\eta_1 \geq \frac{1}{2} \sum_{n=0}^k g_n^{(k+1)} \left( \langle e^{n+1}, e^{n+1} \rangle - \langle e^n, e^n \rangle \right). \quad (3.30)$$

Используя неравенство Коши-Шварца, получаем

$$\eta_2 := -h \sum_{i=1}^{M-1} (R_i^{k+1/2}) \delta_x^2 e^{k+1/2} \leq \frac{K}{2} \|\delta_x^2 e^{k+1/2}\|^2 + \frac{1}{2K} \|R^{k+1/2}\|^2. \quad (3.31)$$

Кроме того,

$$\eta_3 := -h \sum_{i=1}^{M-1} \mathfrak{A} \varrho_i^{k+1/2} \delta_x^2 e_i^{k+1/2}, \quad (3.32)$$

так, что

$$\varrho_i^{k+1/2} = \left[ f \left( x_i, t_{k+1/2}, \frac{3}{2} U_i^k - \frac{1}{2} U_i^{k-1}, \frac{1}{2} U_i^{k+1-n} + \frac{1}{2} U_i^{k-n} \right) - f \left( x_i, t_{k+1/2}, \frac{3}{2} u_i^k - \frac{1}{2} u_i^{k-1}, \frac{1}{2} u_i^{k+1-n} + \frac{1}{2} u_i^{k-n} \right) \right],$$

и

$$\|R^{k+1/2}\|^2 \leq Lc_3^2 (\tau^{2-\alpha} + h^4)^2.$$

Используя (3.28), мы можем вывести

$$\eta_3 \leq \left\langle \mathfrak{A} \left( c_1 \left| \frac{3}{2} e_i^k - \frac{1}{2} e_i^{k-1} \right| + c_2 \left| \frac{1}{2} e_i^{k+1-n} + \frac{1}{2} e_i^{k-n} \right| \right), \delta_x^2 e_i^{k+1/2} \right\rangle. \quad (3.33)$$

Для упрощения обозначений, внутреннее произведение в правой части (3.33) обозначим  $\langle \xi_1, \xi_2 \rangle$ . Использование неравенства Холдера  $\langle \xi_1, \xi_2 \rangle \leq \frac{1}{2\theta} \|\xi_1\|^2 + \frac{\theta}{2} \|\xi_2\|^2$ ,

и беря  $\theta = K$ , мы получаем

$$\eta_3 \leq \frac{1}{2\theta} \|\mathfrak{A} \left( c_1 \left| \frac{3}{2} e_i^k - \frac{1}{2} e_i^{k-1} \right| + c_2 \left| \frac{1}{2} e_i^{k+1-n} + \frac{1}{2} e_i^{k-n} \right| \right)\|^2 + \frac{\theta}{2} \|\delta_x^2 e_i^{k+1/2}\|^2,$$

Применяя лемму 17, получаем

$$\eta_3 \leq \frac{1}{2\theta} \left\| c_1 \left| \frac{3}{2} e_i^k - \frac{1}{2} e_i^{k-1} \right| + c_2 \left| \frac{1}{2} e_i^{k+1-n} + \frac{1}{2} e_i^{k-n} \right| \right\|^2 + \frac{\theta}{2} \|\delta_x^2 e_i^{k+1/2}\|^2,$$

$$\eta_3 \leq \frac{1}{2\theta} h \sum_{i=1}^{M-1} \left( c_1 \left| \frac{3}{2} e_i^k - \frac{1}{2} e_i^{k-1} \right| + c_2 \left| \frac{1}{2} e_i^{k+1-n} + \frac{1}{2} e_i^{k-n} \right| \right)^2 + \frac{\theta}{2} \|\delta_x^2 e_i^{k+1/2}\|^2,$$

$$\eta_3 \leq \frac{1}{2\theta} \left[ hc_1^2 \sum_{i=1}^{M-1} \left( \frac{3}{2} e_i^k - \frac{1}{2} e_i^{k-1} \right)^2 + c_2^2 h \sum_{i=1}^{M-1} \left( \frac{1}{2} e_i^{k+1-n} + \frac{1}{2} e_i^{k-n} \right)^2 \right] + \frac{\theta}{2} \|\delta_x^2 e_i^{k+1/2}\|^2,$$

$$\eta_3 \leq \frac{1}{2\theta} \left[ \frac{5}{2} hc_1^2 \sum_{i=1}^{M-1} \left( (e_i^k)^2 + (e_i^{k-1})^2 \right) + \frac{1}{2} c_2^2 h \sum_{i=1}^{M-1} \left( (e_i^{k+1-n})^2 + (e_i^{k-n})^2 \right) \right] + \frac{\theta}{2} \|\delta_x^2 e_i^{k+1/2}\|^2, \quad (3.34)$$

это означает, что

$$\eta_3 \leq \frac{1}{2K} \left[ \frac{5}{2} c_1^2 \left( \|e^k\|^2 + \|e^{k-1}\|^2 \right) + \frac{1}{2} c_2^2 \left( \|e^{k+1-n}\|^2 + \|e^{k-n}\|^2 \right) \right] + \frac{K}{2} \|\delta_x^2 e_i^{k+1/2}\|^2, \quad (3.35)$$

Подставляя (3.29), (3.31) и (3.35) в (3.26), получаем

$$\sum_{n=0}^k g_n^{(k+1)} \left( \langle e^{n+1}, e^{n+1} \rangle - \langle e^n, e^n \rangle \right) \leq \frac{1}{K} \left[ \frac{5}{2} c_1^2 \left( \|e^k\|^2 + \|e^{k-1}\|^2 \right) + \frac{1}{2} c_2^2 \left( \|e^{k+1-n}\|^2 + \|e^{k-n}\|^2 \right) \right] + \frac{1}{K} \|R^{k+1/2}\|^2, \quad (3.36)$$

что может быть переписано следующим образом

$$g_k^{(k+1)} \langle e^{k+1}, e^{k+1} \rangle \leq \sum_{n=1}^k \left( g_n^{(k+1)} - g_{n-1}^{(k+1)} \right) \langle e^n, e^n \rangle + g_0^{(k+1)} \langle e^0, e^0 \rangle + \frac{1}{K} \left[ \frac{5}{2} c_1^2 \left( \|e^k\|^2 + \|e^{k-1}\|^2 \right) + \frac{1}{2} c_2^2 \left( \|e^{k+1-n}\|^2 + \|e^{k-n}\|^2 \right) \right] + \frac{1}{K} \|R^{k+1/2}\|^2. \quad (3.37)$$

Так как  $\|\nu\|^2 \leq \frac{L^2}{4} \langle \nu, \nu \rangle$ , мы получаем

$$g_k^{(k+1)} \langle e^{k+1}, e^{k+1} \rangle \leq \sum_{n=1}^k \left( g_n^{(k+1)} - g_{n-1}^{(k+1)} \right) \langle e^n, e^n \rangle + g_0^{(k+1)} \langle e^0, e^0 \rangle + \frac{L^2}{4K} \left[ \frac{5}{2} c_1^2 \left( \langle e^k, e^k \rangle + \langle e^{k-1}, e^{k-1} \rangle \right) + \frac{1}{2} c_2^2 \left( \langle e^{k+1-n}, e^{k+1-n} \rangle + \langle e^{k-n}, e^{k-n} \rangle \right) \right] + \frac{1}{K} \|R^{k+1/2}\|^2, \quad (3.38)$$

$$g_k^{(k+1)} \langle e^{k+1}, e^{k+1} \rangle \leq \sum_{n=1}^k \left( g_n^{(k+1)} - g_{n-1}^{(k+1)} \right) \langle e^n, e^n \rangle + g_0^{(k+1)} \langle e^0, e^0 \rangle + \bar{\eta} \left( \langle e^k, e^k \rangle + \langle e^{k-1}, e^{k-1} \rangle + \langle e^{k+1-n}, e^{k+1-n} \rangle + \langle e^{k-n}, e^{k-n} \rangle \right) + \frac{1}{K} \|R^{k+1/2}\|^2, \quad (3.39)$$

$$\bar{\eta} = \frac{1}{K} \max \left\{ \frac{5c_1 L^2}{8}, \frac{c_2 L^2}{8} \right\}.$$

Заметим, что  $g_0^{(k+1)} \geq k_0 > 0$ , и определим  $E_k = \max_{0 \leq l \leq k} \left\{ \langle e^0, e^0 \rangle + \frac{\bar{\eta}}{k_0} \left( \langle e^l, e^l \rangle + \langle e^{l-1}, e^{l-1} \rangle + \langle e^{l+1-n}, e^{l+1-n} \rangle + \langle e^{l-n}, e^{l-n} \rangle \right) + \frac{1}{k_0 K} \|R^{l+1/2}\|^2 \right\}$ , тогда мы можем переписать (3.38) так:

$$g_k^{(k+1)} \langle e^{k+1}, e^{k+1} \rangle \leq \sum_{n=1}^k \left( g_n^{(k+1)} - g_{n-1}^{(k+1)} \right) \langle e^n, e^n \rangle + g_0^{(k+1)} E_k. \quad (3.40)$$

Используя математическую индукцию, мы собираемся доказать, что

$$\langle e^{k+1}, e^{k+1} \rangle \leq E_k, \quad 0 \leq k \leq \ell \leq N-1, \quad (3.41)$$

- для  $k = 0$ , легко увидеть, (3.41) следует из (3.40),
- предположим, что  $\langle e^{k+1}, e^{k+1} \rangle \leq E_k$ ,  $0 \leq k+1 \leq r$ ,
- из (3.40) следует, что

$$g_r^{(r+1)} \langle e^{r+1}, e^{r+1} \rangle \leq \sum_{n=1}^r \left( g_n^{(r+1)} - g_{n-1}^{(r+1)} \right) \langle e^n, e^n \rangle + g_0^{(r+1)} E_r \leq \sum_{n=1}^r \left( g_n^{(r+1)} - g_{n-1}^{(r+1)} \right) E_r + g_0^{(r+1)} E_r = g_r^{(r+1)} E_r, \quad (3.42)$$

следовательно, (3.41) доказано.

Заметим, что  $\langle e^0, e^0 \rangle = 0$ , тогда из (3.41) следует

$$\langle e^{\ell+1}, e^{\ell+1} \rangle \leq \frac{\bar{\eta}}{k_0} \left( \sum_{r=l_0-n}^{l_0-n+1} \langle e^r, e^r \rangle + \sum_{r=l_0-1}^{l_0} \langle e^r, e^r \rangle \right) + \frac{1}{k_0 K} \| R^{l_0+1/2} \|^2, \quad (3.43)$$

где  $l_0$  — номер, на котором достигается максимум в определении  $E_\ell$ . Применяя дискретное неравенство Гронуолла (лемма 19), получаем

$$\langle e^{\ell+1}, e^{\ell+1} \rangle \leq \frac{1}{k_0 K} \| R^{l_0+1/2} \|^2 \exp\left(\frac{4}{k_0} \bar{\eta}\right) \leq C(\tau^{2-\alpha} + h^4)^2, \quad C = \frac{Lc_3^2}{k_0 K} \exp\left(\frac{4}{k_0} \bar{\eta}\right), \quad (3.44)$$

Перепишем (3.44) в виде

$$\| e^{\ell+1} \|_\infty \leq \sqrt{\frac{3L}{8}} C (\tau^{2-\alpha} + h^4)^2 \leq \bar{C} (\tau^{2-\alpha} + h^4).$$

Таким образом, шаг индукции для (3.20) выполняется и этим завершается доказательство.  $\square$

Для того, чтобы проанализировать устойчивость разностной схемы (3.11a)-(3.11c), мы можем тем же способом, как и при анализе сходимости, использовать дискретный энергетический метод. Пусть  $\{\nu_i^k \mid 0 \leq i \leq M, \quad 0 \leq k \leq N\}$  — решение уравнения

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} \left[ \omega_1 \nu^k + \sum_{m=1}^{k-1} (\omega_{k-m+1} - \omega_{k-m}) \nu^m - \omega_k \nu^0 + \sigma \frac{(\nu_i^{k+1} - \nu_i^k)}{2^{1-\alpha}} \right] \\ = K \delta_x^2 \nu_i^{k+1/2} + \mathfrak{A} f(x_i, t_{k+1/2}, \frac{3}{2} \nu_i^k - \frac{1}{2} \nu_i^{k-1}, \frac{1}{2} \nu_i^{k+1-n} + \frac{1}{2} \nu_i^{k-n}), \end{aligned} \quad (3.45)$$

$$\nu_0^k = \phi_0(t_k), \quad \nu_M^k = \phi_L(t_k), \quad 1 \leq k \leq N, \quad (3.46)$$

$$\nu_i^k = \psi(x_i, t_k) + \rho_i^k, \quad 0 \leq i \leq M, \quad -n \leq k \leq 0, \quad (3.47)$$

где  $\rho_i^k$  — возмущение  $\psi(x_i, t_k)$ .

Следуя тем же самым шагам, что и при доказательстве теоремы сходимости, может быть получен следующий результат.

**Теорема 10.** [Теорема устойчивости.]

Предположим, что  $\theta_i^k = \nu_i^k - u_i^k$ ,  $0 \leq i \leq M$ ,  $-n \leq k \leq N$ , тогда существуют постоянные  $c_4, c_5, h_0, \tau_0$ , такие, что выполняется  $\| \theta^k \|_\infty \leq c_4 \sqrt{\tau} \sum_{k=-n}^0 \| \rho^k \|$ ,  $0 \leq k \leq N$ ,

$$\| \rho^k \| = \sqrt{h \sum_{i=1}^{M-1} (\phi_i^k)^2}, \text{ при условии, что } h \leq h_0, \quad \tau \leq \tau_0, \quad \max_{\substack{-n \leq k \leq 0 \\ 0 \leq i \leq M}} | \rho_i^k | \leq c_5.$$

### 3.4 Уравнения диффузии дробного распределенного порядка с запаздыванием

В недавних исследованиях дробные дифференциальные уравнения распределенного порядка успешно применялись для различных задач в математической физике и инжене-

рии [51, 85]. Как одну из реалистических моделей для их уравнения, авторы в [30, 32, 33] приводят многочленную дробную производную в модели вязкоупругости и сравнили эффекты на нескольких системах, таких как осциллятор распределенного порядка и волновое уравнение дробного распределенного порядка. В [153] дробно-распределенное волновое уравнение использовалось, чтобы описать радиальный приток или отток грунтовых вод, и три набора решений получены в качестве тестов водоносного слоя. Так как во многих динамических моделях, кроме того присутствует запаздывание по времени, мы будем изучать этот эффект для уравнений дробного распределенного порядка. Существование и единственность классических решений для класса дробно-распределенных уравнений изучались в [31]. Фундаментальное решение для дробно-распределенных волновых уравнений как плотность вероятности появилось в [82].

Дробное уравнение диффузии имеет вид

$$\frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial t^\alpha} = K \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + f(x, t, u(x, t)), \quad t > 0, \quad 0 \leq x \leq L, \quad (3.48)$$

где дробный порядок  $\alpha \in (0, 1]$ ; если  $\alpha = 1$ , получается классическое уравнение диффузии. Численные методы решения таких уравнений были предложены в [20] методом конечных разностей, в [88] методом спектральных коллокаций и другими методами.

Более общий класс (с распределенным порядком), чем уравнение (3.48), обсуждался в [117, 131].

Уравнение диффузии с распределенным дробным порядком по времени может быть записано в следующем виде

$$\int_0^1 \omega(\alpha) \frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial t^\alpha} d\alpha = K \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + f(x, t, u(x, t)), \quad t > 0, \quad 0 \leq x \leq L. \quad (3.49)$$

Численные решения таких уравнений рассматривались в [67, 75, 97, 131], чтобы преодолеть математическую сложность получения аналитических решений. Для двумерного уравнения вида (3.49) авторы в [78, 79] вывели разностные схемы высокого порядка.

Мы сконцентрируемся на обобщении уравнения (3.49), включающем нелинейную функцию с запаздыванием, более точно, мы рассмотрим

$$\int_0^1 \omega(\alpha) \frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial t^\alpha} d\alpha = K \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + f(x, t, u(x, t), u(x, t - s)), \quad t > 0, \quad 0 \leq x \leq L, \quad (3.50a)$$

со следующими начальными и граничными условиями

$$u(x, t) = \psi(x, t), \quad 0 \leq x \leq L, \quad t \in [-s, 0], \quad (3.50b)$$

$$u(0, t) = \phi_0(t), \quad u(L, t) = \phi_L(t), \quad t > 0, \quad (3.50c)$$

где  $s > 0$  — величина запаздывания,  $K$  — положительная постоянная и  $\omega(\alpha) > 0$  — весовая функция. Дробная производная понимается в смысле Капуто, т.е.

$${}_0^C D_t^\alpha u(x, t) \equiv \frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial t^\alpha} := \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-\zeta)^{-\alpha} \frac{\partial u(x, \zeta)}{\partial \zeta} d\zeta, \quad 0 < \alpha < 1. \quad (3.51)$$

Таким образом мы получаем два фактора усложнения: распределенный порядок и функция с нелинейным запаздыванием.

Далее всюду в этой главе мы будем предполагать, следуя [176], что функция  $f(x, t, \mu, \nu)$  и решение  $u(x, t)$  задачи (3.50) достаточно гладкие в следующем смысле:

- Пусть  $m$  — целое, удовлетворяющее условию  $ms \leq T < (m+1)s$ , определим  $I_r = (rs, (r+1)s)$ ,  $r = -1, 0, \dots, m-1$ ,  $I_m = (ms, T)$ ,  $I = \bigcup_{q=-1}^m I_q$  и допустим, что  $u(x, t) \in C^{(6,3)}([0, L] \times (0, T])$ ,
- Частные производные  $f_\mu(x, t, \mu, \nu)$  and  $f_\nu(x, t, \mu, \nu)$  непрерывны в  $\epsilon_0$ -окрестности решения. Определим

$$c_1 = \sup_{\substack{0 < x < L, 0 < t \leq T \\ |\epsilon_1| \leq \epsilon_0, |\epsilon_2| \leq \epsilon_0}} |f_\mu(x, t, u(x, t) + \epsilon_1, u(x, t-s) + \epsilon_2)|,$$

$$c_2 = \max_{\substack{0 < x < L, 0 < t \leq T \\ |\epsilon_1| \leq \epsilon_0, |\epsilon_2| \leq \epsilon_0}} |f_\nu(x, t, u(x, t) + \epsilon_1, u(x, t-s) + \epsilon_2)|.$$

Основываясь на идеях работ [96] и [176], сконструируем линейризованную разностную схему для (3.50).

### 3.5 Вывод разностной схемы для уравнения диффузии дробного распределенного порядка с запаздыванием

Мы будем получать численное решение, основываясь на аналоге метода Кранка-Никольсон. Сначала мы сведем уравнение диффузии распределенного дробного порядка (3.50) к уравнению диффузии со многими дробными порядками используя квадратурную формулу. Кратко напомним формулу Симпсона (известную также как трехточечную квадратурную формулу Ньютона–Котеса).

**Лемма 22.** *Рассмотрим равномерное разбиение отрезка  $[0, 1]$  на  $2J$  подотрезка, пусть  $\Delta\alpha = \frac{1}{2J}$  и обозначим  $\alpha_l = l \Delta\alpha$ ,  $0 \leq l \leq 2J$ . Тогда справедлива составная формула Симпсона*

$$\int_0^1 f(\alpha) d\alpha = \Delta\alpha \sum_{l=0}^{2J} \gamma_l f(\alpha_l) - \frac{(\Delta\alpha)^4}{180} f^{(4)}(\zeta), \quad \zeta \in [0, 1], \quad (3.52)$$



где

$$\gamma_l = \begin{cases} \frac{1}{3}, & l = 0, 2J, \\ \frac{2}{3}, & l = 2, 4, \dots, 2J-4, 2J-2, \\ \frac{4}{3}, & l = 1, 3, \dots, 2J-3, 2J-1. \end{cases}$$

Будем использовать обозначения как в начале этой главы. Возьмем два положительных целых числа  $M$  и  $n$ , пусть  $h = \frac{L}{M}$ ,  $\tau = \frac{s}{n}$ , обозначим  $x_i = ih$ ,  $t_k = k\tau$  и  $t_{k+1/2} = (k + \frac{1}{2})\tau = \frac{1}{2}(t_k + t_{k+1})$ . Покроем пространственно-временную область сеткой  $\Omega_{h\tau} = \Omega_h \times \Omega_\tau$ , где  $\Omega_h = \{x_i \mid 0 \leq i \leq M\}$ ,  $\Omega_\tau = \{t_k \mid -n \leq k \leq N\}$ ,  $N = \lfloor \frac{T}{\tau} \rfloor$ . Пусть  $\mathcal{W} = \{\nu \mid \nu = v_i^k, 0 \leq i \leq M, -n \leq k \leq N\}$  – пространство сеточных функций на  $\Omega_{h\tau}$ . Для  $\nu \in \mathcal{W}$  определим  $v_i^{k+1/2} = \frac{1}{2}(v_i^k + v_i^{k+1})$  and  $\delta_x^2 v_i^k = \frac{1}{h^2}(v_{i+1}^k - 2v_i^k + v_{i-1}^k)$ .

Обозначим функцию  $G(\alpha) = \omega(\alpha) \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha}$ ,  $\alpha \in (0, 1]$ . Предположим, что  $G(\alpha) \in C^4[0, 1]$ , тогда, используя лемму 22, аппроксимируем интеграл в распределенном порядке

$$\begin{aligned} \int_0^1 \omega(\alpha) \frac{\partial^\alpha u(x_i, t_{k+1/2})}{\partial t^\alpha} d\alpha &= \Delta\alpha \sum_{l=0}^{2J} \gamma_l \omega(\alpha_l) {}_0^C D_t^{\alpha_l} u(x_i, t_{k+1/2}) - \frac{(\Delta\alpha)^4}{180} \Phi^{(4)}(\alpha; x_i, t_{k+1/2}) \Big|_{\alpha=\zeta_i^k}, \\ &= \Delta\alpha \sum_{l=0}^{2J} \gamma_l \omega(\alpha_l) {}_0^C D_t^{\alpha_l} u(x_i, t_{k+1/2}) + O(\Delta\alpha)^4, \end{aligned} \quad (3.53)$$

где  $\zeta_i^k \in [0, 1]$ ,  $\Phi(\alpha; x_i, t_{k+1/2}) = \omega(\alpha) \frac{\partial^\alpha u(x_i, t_{k+1/2})}{\partial t^\alpha}$ .

Определим сеточную функцию на  $\Omega_{h\tau}$ :  $U(i, k) = u(x_i, t_k)$ . Используемая в работе [96] аппроксимация дробной производной Капуто в  $t_{k+1/2}$  при  $0 < \alpha_l < 1$  дает

$$\frac{\partial^{\alpha_l} u(x_i, t_{k+1/2})}{\partial t^{\alpha_l}} = \omega_1^l U_i^k + \sum_{m=1}^{k-1} (\omega_{k-m+1}^l - \omega_{k-m}^l) U_i^m - \omega_k^l U_i^0 + \frac{\sigma^l}{2^{1-\alpha_l}} (U_i^{k+1} - U_i^k) + O(\tau^{2-\alpha_l}), \quad (3.54)$$

где

$$\omega_i^l = \sigma^l \left( \left( i + \frac{1}{2} \right)^{1-\alpha_l} - \left( i - \frac{1}{2} \right)^{1-\alpha_l} \right), \quad \sigma^l = \frac{1}{\tau^{\alpha_l} \Gamma(2-\alpha_l)}, \quad 0 \leq i \leq M, \quad 0 \leq k \leq N-1. \quad (3.55)$$

Применим (3.54) к уравнению (3.53) в точках  $(x_i, t_{k+1/2})$ , получим

$$\begin{aligned} \Delta\alpha \sum_{l=0}^{2J} \gamma_l \omega(\alpha_l) \left[ \omega_1^l U_i^k + \sum_{m=1}^{k-1} (\omega_{k-m+1}^l - \omega_{k-m}^l) U_i^m - \omega_k^l U_i^0 + \frac{\sigma^l}{2^{1-\alpha_l}} (U_i^{k+1} - U_i^k) + O(\tau^{2-\alpha_l}) \right] \\ + O(\Delta\alpha)^4 = K \frac{\partial^2 u(x_i, t_{k+1/2})}{\partial x^2} + f(x_i, t_{k+1/2}, u(x_i, t_{k+1/2}), u(x_i, t_{k+1/2} - s)). \end{aligned} \quad (3.56)$$

**Лемма 23.** Для  $g = (g_0, g_1, \dots, g_M)$ , определим линейный оператор  $\mathfrak{A}$  следующим образом

$$\mathfrak{A}g_i = \frac{1}{12}(g_{i-1} + 10g_i + g_{i+1}), \quad 1 \leq i \leq M-1.$$

Тогда получаем

$$\begin{aligned} \Delta\alpha \sum_{l=0}^{2J} \gamma_l \omega(\alpha_l) \mathfrak{A} \left[ \omega_1^l U_i^k + \sum_{m=1}^{k-1} (\omega_{k-m+1}^l - \omega_{k-m}^l) U_i^m - \omega_k^l U_i^0 + \frac{\sigma^l}{2^{1-\alpha_l}} (U_i^{k+1} - U_i^k) \right] \\ = K \delta_x^2 U_i^{k+1/2} + \mathfrak{A} f \left( x_i, t_{k+1/2}, \frac{3}{2} U_i^k - \frac{1}{2} U_i^{k-1}, \frac{1}{2} U_i^{k+1-n} + \frac{1}{2} U_i^{k-n} \right) + R_i^k, \end{aligned} \quad (3.57)$$

где

$$|R_i^k| = O((\Delta\alpha)^4 + h^4 + \tau), \quad 1 \leq i \leq M-1, \quad 0 \leq k \leq N-1. \quad (3.58)$$

Лемма доказывается подобно лемме 14.

Окончательный вид нашей разностной схемы получаем, пренебрегая  $R_i^k$  и заменяя в (3.57)  $U_i^k$  на  $u_i^k$

$$\begin{aligned} \Delta\alpha \sum_{l=0}^{2J} \gamma_l \omega(\alpha_l) \mathfrak{A} \left[ \omega_1^l u_i^k + \sum_{m=1}^{k-1} (\omega_{k-m+1}^l - \omega_{k-m}^l) u_i^m - \omega_k^l u_i^0 + \frac{\sigma^l}{2^{1-\alpha_l}} (u_i^{k+1} - u_i^k) \right] \\ = K \delta_x^2 u_i^{k+1/2} + \mathfrak{A} f \left( x_i, t_{k+1/2}, \frac{3}{2} u_i^k - \frac{1}{2} u_i^{k-1}, \frac{1}{2} u_i^{k+1-n} + \frac{1}{2} u_i^{k-n} \right), \end{aligned} \quad (3.59a)$$

и учитывая начальные и граничные условия

$$u_0^k = \phi_0(t_k), \quad u_M^k = \phi_L(t_k), \quad 1 \leq k \leq N, \quad (3.59b)$$

$$u_i^k = \psi(x_i, t_k), \quad 0 \leq i \leq M, \quad -n \leq k \leq 0. \quad (3.59c)$$

### 3.6 Разрешимость, сходимость и устойчивость разностной схемы

Рассмотрим теоремы об однозначной разрешимости, устойчивости и сходимости в норме  $L_\infty$  используя энергетический метод.

Равенство (3.54) может быть переписано в следующем виде

$$\frac{\partial^{\alpha_l} u(x_i, t_{k+1/2})}{\partial t^{\alpha_l}} = \frac{\tau^{1-\alpha_l}}{\Gamma(2-\alpha_l)} \left[ a_{k-m+1}^{\alpha_l} u_{t,m-1} + a_0^{\alpha_l} u_{t,k} \right] + O(\tau^{2-\alpha_l}), \quad (3.60)$$

где  $a_0^\alpha = \left(\frac{1}{2}\right)^{1-\alpha}$ ,  $a_l^\alpha = (l+1/2)^{1-\alpha} - (l-1/2)^{1-\alpha}$ ,  $l \geq 1$ ,

тогда

$$\frac{\partial^\alpha u(x_i, t_{k+1/2})}{\partial t^\alpha} = \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{m=0}^k C_{k-m}^{(k+1)} u_{t,m}, \quad u_{t,m} = \frac{u_{m+1} - u_m}{\tau}, \quad (3.61)$$

где  $c_{0,l}^{(k+1)} = a_0^{\alpha_l}$  для  $j = 0$  и для  $j \geq 1$

$$C_{m,l}^{(k+1)} = \begin{cases} a_0^{\alpha_l} & m = 0, \\ a_m^{\alpha_l} & 1 \leq m \leq k-1, \\ a_k^{\alpha_l} & m = k; \end{cases}$$

Тогда, если  $0 < \alpha_l \leq 1$  и  $u(x, t) \in C^2[0, T]$ , то

$$\frac{\partial^{\alpha_l} u(x_i, t_{k+1/2})}{\partial t^{\alpha_l}} = \sum_{n=0}^k g_{n,l}^{(k+1)} \left[ u(x_i, t_{n+1}) - u(x_i, t_n) \right] + O(\tau^{2-\alpha_l}) := \Delta_{t_{k+1/2}}^{\alpha_l} u + O(\tau^{2-\alpha_l}), \quad (3.62)$$

где  $g_{n,l}^{(k+1)} = \frac{\tau^{-\alpha_l}}{\Gamma(2-\alpha_l)} C_{k-n,l}^{(k+1)}$ .

В этом разделе будем использовать аналоги лемм 15, 16, 20 и 21 с заменой  $\alpha$  на  $\alpha_l$ , а также другие утверждения и обозначения раздела 3.3.

**Теорема 11.** *Разностная схема (3.59) однозначно разрешима.*

*Доказательство.* Предположим, что  $u_i^k$ ,  $0 \leq i \leq M$  — решение разностной схемы (3.59). Применим математическую индукцию по  $k$ . База индукции выполняется, так как решение  $u_i^k$  определено единственным образом для  $-n \leq k \leq 0$  из начальных условий (3.59b). Предположим, что  $u_i^k$  единственным образом определено, когда  $k \leq l$ , тогда из (3.59a) мы получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно  $u_i^{l+1}$ . Покажем, что матрица этой системы имеет строгое диагональное преобладание, тогда существует единственное решение  $u_i^{l+1}$ .

Мы можем представить систему (3.59a) в следующем виде

$$\begin{aligned} & \left( \left[ \frac{\Delta\alpha}{12} \sum_{l=0}^{2J} \gamma_l \omega(\alpha_l) \frac{\sigma^l}{2^{1-\alpha_l}} - \frac{K}{2h^2} \right] u_{i+1}^{k+1} + \left[ \frac{10\Delta\alpha}{12} \sum_{l=0}^{2J} \gamma_l \omega(\alpha_l) \frac{\sigma^l}{2^{1-\alpha_l}} + \frac{K}{h^2} \right] u_i^{k+1} + \right. \\ & \quad \left. \left[ \frac{\Delta\alpha}{12} \sum_{l=0}^{2J} \gamma_l \omega(\alpha_l) \frac{\sigma^l}{2^{1-\alpha_l}} - \frac{K}{2h^2} \right] u_{i-1}^{k+1} \right) + \left( \left[ \frac{\Delta\alpha}{12} \sum_{l=0}^{2J} \gamma_l \omega(\alpha_l) (\omega_1^l - \frac{\sigma^l}{2^{1-\alpha_l}}) - \frac{K}{2h^2} \right] u_{i+1}^k + \right. \\ & \quad \left. \left[ \frac{10\Delta\alpha}{12} \sum_{l=0}^{2J} \gamma_l \omega(\alpha_l) (\omega_1^l - \frac{\sigma^l}{2^{1-\alpha_l}}) + \frac{K}{h^2} \right] u_i^k + \left[ \frac{\Delta\alpha}{12} \sum_{l=0}^{2J} \gamma_l \omega(\alpha_l) (\omega_1^l - \frac{\sigma^l}{2^{1-\alpha_l}}) - \frac{K}{2h^2} \right] u_{i-1}^k \right) + \\ & \quad \mathfrak{A} \left( \sum_{m=1}^{k-1} (\omega_{k-m+1}^l - \omega_{k-m}^l) u_i^m - \omega_k^l u_i^0 \right) = \mathfrak{A} f \left( x_i, t_{k+1/2}, \frac{3}{2} u_i^k - \frac{1}{2} u_i^{k-1}, \frac{1}{2} u_i^{k+1-n} + \frac{1}{2} u_i^{k-n} \right) \end{aligned}$$

В соответствие с написанным выше, коэффициенты матрицы  $A = (a_{ij})$  обладают строгим диагональным преобладанием, то есть  $a_{ii} > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ , вследствие

$$a_{ii} = \frac{10}{12} \sum_{l=0}^{2J} \gamma_l \omega(\alpha_l) \frac{\sigma^l \Delta\alpha}{2^{1-\alpha_l}} + \frac{K}{h^2}, \quad a_{i+1,i} = \frac{1}{12} \sum_{l=0}^{2J} \gamma_l \omega(\alpha_l) \frac{\sigma^l \Delta\alpha}{2^{1-\alpha_l}} - \frac{K}{2h^2} = a_{i-1,i}, \quad \frac{\sigma^l}{2^{1-\alpha}} > 0.$$

Следовательно, матрица невырожденная, и этим доказывается теорема.  $\square$

**Теорема 12.** [Теорема сходимости.]

Пусть  $u(x, t) \in C^{6,2}([0, L] \times (-s, T])$ , — решение (3.50), такое, что  $u(x_i, t_k) = U_i^k$  и  $u_i^k$  ( $0 \leq i \leq M, -n \leq k \leq N$ ) — решение разностной схемы (3.59), обозначим  $e_i^k = U_i^k - u_i^k$ , для  $0 \leq i \leq M, -n \leq k \leq N$ , тогда, если

$$\tau \leq \tau_0 = \left( \frac{\epsilon_0}{6C} \right), \quad h \leq h_0 = \left( \frac{\epsilon_0}{6C} \right)^{\frac{1}{4}}, \quad \Delta\alpha \leq \left( \frac{\epsilon_0}{6C} \right)^{\frac{1}{4}}, \quad (3.63)$$

тогда

$$\|e^k\|_\infty \leq \bar{C} (\tau + \Delta\alpha^4 + h^4), \quad 0 \leq k \leq N, \quad (3.64)$$

где  $\bar{C}$  — положительная постоянная, не зависящая от  $h$ ,  $\Delta\alpha$  и  $\tau$ .

*Доказательство.* Разностная схема (3.57) и (3.59а) может быть переписана в терминах (3.62) следующим образом

$$\begin{aligned} \Delta\alpha \sum_{l=0}^{2J} \gamma_l \omega(\alpha_l) \mathfrak{A} \left[ \sum_{n=0}^k g_{n,l}^{(k+1)} (U_i^{n+1} - U_i^n) \right] &= K \delta_x^2 U_i^{k+1/2} + \\ &\mathfrak{A} f \left( x_i, t_{k+1/2}, \frac{3}{2} U_i^k - \frac{1}{2} U_i^{k-1}, \frac{1}{2} U_i^{k+1-n} + \frac{1}{2} U_i^{k-n} \right) + R_i^{k+1/2}, \end{aligned} \quad (3.65)$$

$$\begin{aligned} \Delta\alpha \sum_{l=0}^{2J} \gamma_l \omega(\alpha_l) \mathfrak{A} \left[ \sum_{n=0}^k g_{n,l}^{(k+1)} (u_i^{n+1} - u_i^n) \right] &= K \delta_x^2 u_i^{k+1/2} + \\ &\mathfrak{A} f \left( x_i, t_{k+1/2}, \frac{3}{2} u_i^k - \frac{1}{2} u_i^{k-1}, \frac{1}{2} u_i^{k+1-n} + \frac{1}{2} u_i^{k-n} \right), \end{aligned} \quad (3.66)$$

Погрешность разностной схемы может быть получена вычитанием (3.66) из (3.65), с последующей заменой  $u$  на  $U$ :

$$\begin{aligned} \Delta\alpha \sum_{l=0}^{2J} \gamma_l \omega(\alpha_l) \mathfrak{A} \left[ \sum_{n=0}^k g_{n,l}^{(k+1)} (e_i^{n+1} - e_i^n) \right] &= K \delta_x^2 e_i^{k+1/2} + R_i^{k+1/2} + \\ &\mathfrak{A} \left[ f \left( x_i, t_{k+1/2}, \frac{3}{2} U_i^k - \frac{1}{2} U_i^{k-1}, \frac{1}{2} U_i^{k+1-n} + \frac{1}{2} U_i^{k-n} \right) - \right. \\ &\left. f \left( x_i, t_{k+1/2}, \frac{3}{2} u_i^k - \frac{1}{2} u_i^{k-1}, \frac{1}{2} u_i^{k+1-n} + \frac{1}{2} u_i^{k-n} \right) \right], \end{aligned} \quad (3.67)$$

и

$$e_0^k = 0, \quad e_M^k = 0, \quad 1 \leq k \leq N, \quad (3.68)$$

$$e_i^k = 0, \quad 0 \leq i \leq M, \quad -n \leq k \leq 0. \quad (3.69)$$

Умножая (3.67) на  $-h(\delta_x^2 e_i^{k+1/2})$  и суммируя по  $i$  от  $i$  до  $M-1$ , получаем

$$\begin{aligned} -h\Delta\alpha \sum_{l=0}^{2J} \gamma_l \omega(\alpha_l) \sum_{i=1}^{M-1} \mathfrak{A} \left[ \sum_{n=0}^k g_{n,l}^{(k+1)} (e_i^{n+1} - e_i^n) \right] \delta_x^2 e_i^{k+1/2} &= -\frac{K}{\sigma} \|\delta_x^2 e_i^{k+1/2}\|^2 \\ -\frac{h}{\sigma} \sum_{i=1}^{M-1} (R_i^{k+1/2}) \delta_x^2 e_i^{k+1/2} - \frac{h}{\sigma} \sum_{i=1}^{M-1} \mathfrak{A} \left[ f \left( x_i, t_{k+1/2}, \frac{3}{2} U_i^k - \frac{1}{2} U_i^{k-1}, \frac{1}{2} U_i^{k+1-n} + \frac{1}{2} U_i^{k-n} \right) \right. \\ &\left. - f \left( x_i, t_{k+1/2}, \frac{3}{2} u_i^k - \frac{1}{2} u_i^{k-1}, \frac{1}{2} u_i^{k+1-n} + \frac{1}{2} u_i^{k-n} \right) \right] \delta_x^2 e_i^{k+1/2}. \end{aligned} \quad (3.70)$$

Докажем (3.64) методом математической индукции. База индукции очевидна: из (3.69) следует  $\|e^k\|_\infty = 0$ ,  $-n \leq k \leq 0$ , в частности, таким образом получаем  $\|e^0\|_\infty = 0$ .

Далее, предположим, что (3.64) выполнено для  $0 \leq k \leq \ell$ , покажем, что (3.64) справедливо для  $k = \ell + 1$ .

Из индуктивной гипотезы, если  $\tau$  и  $h$  удовлетворяют (3.63), получаем

$$\|e^k\|_\infty \leq C(\tau + (\Delta\alpha)^4 + h^4) \leq \epsilon_0/2, \quad 0 \leq k \leq \ell. \quad (3.71)$$

Из (3.71), мы заключаем, что  $|e^k| \leq \epsilon_0/2$ ,  $0 \leq k \leq \ell$ , и  $|U_i^k - u_i^k| \leq \epsilon_0/2$ ,  $|U_i^{k-1} - u_i^{k-1}| \leq \epsilon_0/2$ ,  $0 \leq k \leq \ell$ , тогда  $|\frac{3}{2}(U_i^k - u_i^k) - \frac{1}{2}(U_i^{k-1} - u_i^{k-1})| \leq \epsilon_0/2$ , и следующее неравенство выполняется  $|\frac{3}{2}U_i^k - \frac{1}{2}U_i^{k-1} - (\frac{3}{2}u_i^k - \frac{1}{2}u_i^{k-1})| \leq \epsilon_0$ ,  $0 \leq i \leq M$ ,  $0 \leq k \leq \ell$ .

Тем же самым способом, мы получаем  $|\frac{1}{2}(U_i^{k+1-n} - u_i^{k+1-n}) + \frac{1}{2}(U_i^{k-n} - u_i^{k-n})| \leq \epsilon_0/2$ , тогда выполняется следующее неравенство  $|\frac{1}{2}U_i^{k+1-n} + \frac{1}{2}U_i^{k-n} - (\frac{1}{2}u_i^{k+1-n} + \frac{1}{2}u_i^{k-n})| \leq \epsilon_0$ ,  $0 \leq i \leq M$ ,  $0 \leq k \leq \ell$ , следовательно,

$$\left| f\left(x_i, t_{k+1/2}, \frac{3}{2}U_i^k - \frac{1}{2}U_i^{k-1}, \frac{1}{2}U_i^{k+1-n} + \frac{1}{2}U_i^{k-n}\right) - f\left(x_i, t_{k+1/2}, \frac{3}{2}u_i^k - \frac{1}{2}u_i^{k-1}, \frac{1}{2}u_i^{k+1-n} + \frac{1}{2}u_i^{k-n}\right) \right| \leq c_1 \left| \frac{3}{2}e_i^k - \frac{1}{2}e_i^{k-1} \right| + c_2 \left| \frac{1}{2}e_i^{k+1-n} + \frac{1}{2}e_i^{k-n} \right|, \quad 0 \leq i \leq M, \quad 0 \leq k \leq \ell,$$

и таким образом,

$$\left| \mathfrak{A} \left[ f\left(x_i, t_{k+1/2}, \frac{3}{2}U_i^k - \frac{1}{2}U_i^{k-1}, \frac{1}{2}U_i^{k+1-n} + \frac{1}{2}U_i^{k-n}\right) - f\left(x_i, t_{k+1/2}, \frac{3}{2}u_i^k - \frac{1}{2}u_i^{k-1}, \frac{1}{2}u_i^{k+1-n} + \frac{1}{2}u_i^{k-n}\right) \right] \right| \leq \mathfrak{A} \left( c_1 \left| \frac{3}{2}e_i^k - \frac{1}{2}e_i^{k-1} \right| + c_2 \left| \frac{1}{2}e_i^{k+1-n} + \frac{1}{2}e_i^{k-n} \right| \right), \quad 0 \leq i \leq M, \quad 0 \leq k \leq \ell, \quad (3.72)$$

Исследуем отдельно каждую часть (3.70)

$$\begin{aligned} \eta_1 &:= -\Delta\alpha \sum_{l=0}^{2J} \gamma_l \omega(\alpha_l) h \sum_{i=1}^{M-1} \mathfrak{A} \left[ \sum_{n=0}^k g_{n,l}^{(k+1)} (e_i^{n+1} - e_i^n) \right] \delta_x^2 e_i^{k+1/2} \\ &= \Delta\alpha \sum_{l=0}^{2J} \gamma_l \omega(\alpha_l) \sum_{n=0}^k g_{n,l}^{(k+1)} \langle e^{n+1} - e^n, e^{k+1/2} \rangle, \end{aligned} \quad (3.73)$$

используя лемму 21 в (3.73), мы получаем

$$\eta_1 \geq \frac{1}{2} \Delta\alpha \sum_{l=0}^{2J} \gamma_l \omega(\alpha_l) \sum_{n=0}^k g_{n,l}^{(k+1)} \left( \langle e^{n+1}, e^{n+1} \rangle - \langle e^n, e^n \rangle \right). \quad (3.74)$$

Используя неравенство Коши-Шварца, получим

$$\eta_2 := -h \sum_{i=1}^{M-1} (R_i^{k+1/2}) \delta_x^2 e^{k+1/2} \leq \frac{K}{2} \|\delta_x^2 e^{k+1/2}\|^2 + \frac{1}{2K} \|R^{k+1/2}\|^2. \quad (3.75)$$

Кроме того,

$$\eta_3 := -h \sum_{i=1}^{M-1} \mathfrak{A} \varrho_i^{k+1/2} \delta_x^2 e_i^{k+1/2}, \quad (3.76)$$

так что

$$\varrho_i^{k+1/2} = \left[ f \left( x_i, t_{k+1/2}, \frac{3}{2}U_i^k - \frac{1}{2}U_i^{k-1}, \frac{1}{2}U_i^{k+1-n} + \frac{1}{2}U_i^{k-n} \right) - f \left( x_i, t_{k+1/2}, \frac{3}{2}u_i^k - \frac{1}{2}u_i^{k-1}, \frac{1}{2}u_i^{k+1-n} + \frac{1}{2}u_i^{k-n} \right) \right],$$

и

$$\| R^{k+1/2} \|^2 \leq Lc_3^2(\tau + (\Delta\alpha)^4 + h^4)^2.$$

Используя (3.72), мы можем вывести, что

$$\eta_3 \leq \left\langle \mathfrak{A} \left( c_1 \left| \frac{3}{2}e_i^k - \frac{1}{2}e_i^{k-1} \right| + c_2 \left| \frac{1}{2}e_i^{k+1-n} + \frac{1}{2}e_i^{k-n} \right| \right), \delta_x^2 e_i^{k+1/2} \right\rangle. \quad (3.77)$$

Для простоты внутреннее произведение в правой части (3.77) обозначим  $\langle \xi_1, \xi_2 \rangle$ . Использование неравенства Холдера дает  $\langle \xi_1, \xi_2 \rangle \leq \frac{1}{2\theta} \|\xi_1\|^2 + \frac{\theta}{2} \|\xi_2\|^2$ , и, взяв  $\theta = K$ , мы получаем

$$\eta_3 \leq \frac{1}{2\theta} \left\| \mathfrak{A} \left( c_1 \left| \frac{3}{2}e_i^k - \frac{1}{2}e_i^{k-1} \right| + c_2 \left| \frac{1}{2}e_i^{k+1-n} + \frac{1}{2}e_i^{k-n} \right| \right) \right\|^2 + \frac{\theta}{2} \|\delta_x^2 e_i^{k+1/2}\|^2.$$

Применяя лемму 17, получаем

$$\eta_3 \leq \frac{1}{2\theta} \left\| c_1 \left| \frac{3}{2}e_i^k - \frac{1}{2}e_i^{k-1} \right| + c_2 \left| \frac{1}{2}e_i^{k+1-n} + \frac{1}{2}e_i^{k-n} \right| \right\|^2 + \frac{\theta}{2} \|\delta_x^2 e_i^{k+1/2}\|^2,$$

$$\eta_3 \leq \frac{1}{2\theta} h \sum_{i=1}^{M-1} \left( c_1 \left| \frac{3}{2}e_i^k - \frac{1}{2}e_i^{k-1} \right| + c_2 \left| \frac{1}{2}e_i^{k+1-n} + \frac{1}{2}e_i^{k-n} \right| \right)^2 + \frac{\theta}{2} \|\delta_x^2 e_i^{k+1/2}\|^2,$$

$$\eta_3 \leq \frac{1}{2\theta} \left[ hc_1^2 \sum_{i=1}^{M-1} \left( \frac{3}{2}e_i^k - \frac{1}{2}e_i^{k-1} \right)^2 + c_2^2 h \sum_{i=1}^{M-1} \left( \frac{1}{2}e_i^{k+1-n} + \frac{1}{2}e_i^{k-n} \right)^2 \right] + \frac{\theta}{2} \|\delta_x^2 e_i^{k+1/2}\|^2,$$

$$\eta_3 \leq \frac{1}{2\theta} \left[ \frac{5}{2}hc_1^2 \sum_{i=1}^{M-1} \left( (e_i^k)^2 + (e_i^{k-1})^2 \right) + \frac{1}{2}c_2^2 h \sum_{i=1}^{M-1} \left( (e_i^{k+1-n})^2 + (e_i^{k-n})^2 \right) \right] + \frac{\theta}{2} \|\delta_x^2 e_i^{k+1/2}\|^2, \quad (3.78)$$

это означает, что

$$\eta_3 \leq \frac{1}{2K} \left[ \frac{5}{2}c_1^2 \left( \|e^k\|^2 + \|e^{k-1}\|^2 \right) + \frac{1}{2}c_2^2 \left( \|e^{k+1-n}\|^2 + \|e^{k-n}\|^2 \right) \right] + \frac{K}{2} \|\delta_x^2 e_i^{k+1/2}\|^2. \quad (3.79)$$

Подставляя (3.73), (3.75) и (3.79) в (3.70), получаем

$$\Delta\alpha \sum_{l=0}^{2J} \gamma_l \omega(\alpha_l) \sum_{n=0}^k g_{n,l}^{(k+1)} \left( \langle e^{n+1}, e^{n+1} \rangle - \langle e^n, e^n \rangle \right) \leq \frac{1}{K} \left[ \frac{5}{2}c_1^2 \left( \|e^k\|^2 + \|e^{k-1}\|^2 \right) + \frac{1}{2}c_2^2 \left( \|e^{k+1-n}\|^2 + \|e^{k-n}\|^2 \right) \right] + \frac{1}{K} \|R^{k+1/2}\|^2, \quad (3.80)$$

что может быть переписано следующим образом

$$\begin{aligned} \Delta\alpha \sum_{l=0}^{2J} \gamma_l \omega(\alpha_l) g_{k,l}^{(k+1)} \langle e^{k+1}, e^{k+1} \rangle &\leq \Delta\alpha \sum_{l=0}^{2J} \gamma_l \omega(\alpha_l) \sum_{n=1}^k \left( g_{n,l}^{(k+1)} - g_{n-1,l}^{(k+1)} \right) \langle e^n, e^n \rangle + \\ \Delta\alpha \sum_{l=0}^{2J} \gamma_l \omega(\alpha_l) g_{0,l}^{(k+1)} \langle e^0, e^0 \rangle &+ \frac{1}{K} \left[ \frac{5}{2} c_1^2 \left( \|e^k\|^2 + \|e^{k-1}\|^2 \right) + \frac{1}{2} c_2^2 \left( \|e^{k+1-n}\|^2 + \|e^{k-n}\|^2 \right) \right] + \\ &\frac{1}{K} \|R^{k+1/2}\|^2. \end{aligned} \quad (3.81)$$

Так как  $\|\nu\|^2 \leq \frac{L^2}{4} \langle \nu, \nu \rangle$ , мы получаем

$$\begin{aligned} \Delta\alpha \sum_{l=0}^{2J} \gamma_l \omega(\alpha_l) g_{k,l}^{(k+1)} \langle e^{k+1}, e^{k+1} \rangle &\leq \Delta\alpha \sum_{l=0}^{2J} \gamma_l \omega(\alpha_l) \sum_{n=1}^k \left( g_{n,l}^{(k+1)} - g_{n-1,l}^{(k+1)} \right) \langle e^n, e^n \rangle + \\ \Delta\alpha \sum_{l=0}^{2J} \gamma_l \omega(\alpha_l) g_{0,l}^{(k+1)} \langle e^0, e^0 \rangle &+ \frac{L^2}{4K} \left[ \frac{5}{2} c_1^2 \left( \langle e^k, e^k \rangle + \langle e^{k-1}, e^{k-1} \rangle \right) + \right. \\ &\left. \frac{1}{2} c_2^2 \left( \langle e^{k+1-n}, e^{k+1-n} \rangle + \langle e^{k-n}, e^{k-n} \rangle \right) \right] + \frac{1}{K} \|R^{k+1/2}\|^2, \end{aligned} \quad (3.82)$$

$$\begin{aligned} \Delta\alpha \sum_{l=0}^{2J} \gamma_l \omega(\alpha_l) g_{k,l}^{(k+1)} \langle e^{k+1}, e^{k+1} \rangle &\leq \Delta\alpha \sum_{l=0}^{2J} \gamma_l \omega(\alpha_l) \sum_{n=1}^k \left( g_{n,l}^{(k+1)} - g_{n-1,l}^{(k+1)} \right) \langle e^n, e^n \rangle + \\ \Delta\alpha \sum_{l=0}^{2J} \gamma_l \omega(\alpha_l) g_{0,l}^{(k+1)} \langle e^0, e^0 \rangle &+ \bar{\eta} \left( \langle e^k, e^k \rangle + \langle e^{k-1}, e^{k-1} \rangle + \langle e^{k+1-n}, e^{k+1-n} \rangle + \langle e^{k-n}, e^{k-n} \rangle \right) + \\ &\frac{1}{K} \|R^{k+1/2}\|^2, \quad \bar{\eta} = \frac{1}{K} \max \left\{ \frac{5c_1 L^2}{8}, \frac{c_2 L^2}{8} \right\}. \end{aligned} \quad (3.83)$$

Замечая, что  $g_{0,l}^{(k+1)} \geq k_{0,l} > 0$ , и определяя

$$\begin{aligned} E_k = \max_{0 \leq l \leq k} \left\{ \Delta\alpha \sum_{l=0}^{2J} \gamma_l \omega(\alpha_l) \langle e^0, e^0 \rangle + \frac{\bar{\eta}}{\Delta\alpha \sum_{l=0}^{2J} \gamma_l \omega(\alpha_l) k_{0,l}} \left( \langle e^k, e^k \rangle + \langle e^{k-1}, e^{k-1} \rangle + \right. \right. \\ \left. \left. + \langle e^{k+1-n}, e^{k+1-n} \rangle + \langle e^{k-n}, e^{k-n} \rangle \right) + \frac{1}{K \Delta\alpha \sum_{l=0}^{2J} \gamma_l \omega(\alpha_l) k_{0,l}} \|R^{k+1/2}\|^2 \right\}, \end{aligned}$$

мы можем переписать (3.82) в следующем виде

$$\begin{aligned} \Delta\alpha \sum_{l=0}^{2J} \gamma_l \omega(\alpha_l) g_{k,l}^{(k+1)} \langle e^{k+1}, e^{k+1} \rangle &\leq \\ \Delta\alpha \sum_{l=0}^{2J} \gamma_l \omega(\alpha_l) \sum_{n=1}^k \left( g_{n,l}^{(k+1)} - g_{n-1,l}^{(k+1)} \right) \langle e^n, e^n \rangle &+ \Delta\alpha \sum_{l=0}^{2J} \gamma_l \omega(\alpha_l) g_{0,l}^{(k+1)} E_k. \end{aligned} \quad (3.84)$$

Используя математическую индукцию, мы собираемся доказать, что

$$\langle e^{k+1}, e^{k+1} \rangle \leq E_k, \quad 0 \leq k \leq \ell \leq N-1, \quad (3.85)$$

- для  $k=0$ , легко увидеть, что (3.85) следует из (3.84),
- предположим, что  $\langle e^{k+1}, e^{k+1} \rangle \leq E_k$ ,  $0 \leq k+1 \leq r$ ,

• тогда из (3.84) следует, что

$$\begin{aligned}
\Delta\alpha \sum_{l=0}^{2J} \gamma_l \omega(\alpha_l) g_{r,l}^{(r+1)} \langle e^{r+1}, e^{r+1} \rangle &\leq \Delta\alpha \sum_{l=0}^{2J} \gamma_l \omega(\alpha_l) \sum_{n=1}^r \left( g_{n,l}^{(r+1)} - g_{n-1,l}^{(r+1)} \right) \langle e^n, e^n \rangle + \\
&\Delta\alpha \sum_{l=0}^{2J} \gamma_l \omega(\alpha_l) g_{0,l}^{(r+1)} E_r \leq \\
\Delta\alpha \sum_{l=0}^{2J} \gamma_l \omega(\alpha_l) \sum_{n=1}^r \left( g_{n,l}^{(r+1)} - g_{n-1,l}^{(r+1)} \right) E_r + \Delta\alpha \sum_{l=0}^{2J} \gamma_l \omega(\alpha_l) g_{0,l}^{(r+1)} E_r &= \Delta\alpha \sum_{l=0}^{2J} \gamma_l \omega(\alpha_l) g_{r,l}^{(r+1)} E_r.
\end{aligned} \tag{3.86}$$

Следовательно (3.85) доказано.

Заметим, что  $\langle e^0, e^0 \rangle = 0$ , тогда из (3.85) следует

$$\begin{aligned}
\langle e^{\ell+1}, e^{\ell+1} \rangle &\leq \frac{\bar{\eta}}{\Delta\alpha \sum_{l=0}^{2J} \gamma_l \omega(\alpha_l) k_{0,l}} \left( \sum_{r=l_0-n}^{l_0-n+1} \langle e^r, e^r \rangle + \sum_{r=l_0-1}^{l_0} \langle e^r, e^r \rangle \right) + \\
&+ \frac{1}{K \Delta\alpha \sum_{l=0}^{2J} \gamma_l \omega(\alpha_l) k_{0,l}} \| R^{l_0+1/2} \|^2,
\end{aligned} \tag{3.87}$$

где  $l_0$  — номер, на котором достигается максимум в определении  $E_\ell$ . Применяя дискретное неравенство Гронуолла, получаем

$$\begin{aligned}
\langle e^{\ell+1}, e^{\ell+1} \rangle &\leq \frac{1}{K \Delta\alpha \sum_{l=0}^{2J} \gamma_l \omega(\alpha_l) k_{0,l}} \| R^{l_0+1/2} \|^2 \exp \left( \frac{4 \bar{\eta}}{\Delta\alpha \sum_{l=0}^{2J} \gamma_l \omega(\alpha_l) k_{0,l}} \right) \leq \\
C(\tau + (\Delta\alpha)^4 + h^4)^2, \quad C &= \frac{Lc_3^2}{K \Delta\alpha \sum_{l=0}^{2J} \gamma_l \omega(\alpha_l) k_{0,l}} \exp \left( \frac{4 \bar{\eta}}{\Delta\alpha \sum_{l=0}^{2J} \gamma_l \omega(\alpha_l) k_{0,l}} \right),
\end{aligned} \tag{3.88}$$

Заметим, что так как  $\Delta\alpha \sum_{l=0}^{2J} \gamma_l \omega(\alpha_l) k_{0,l} = \Delta\alpha \sum_{l=0}^{2J} \frac{\gamma_l \omega(\alpha_l)}{2T^{\alpha_l} \Gamma(1-\alpha_l)}$  при  $\Delta\alpha \rightarrow 0$  стремится к величине  $\int_0^1 \frac{\omega(\alpha)}{2T^{\alpha} \Gamma(1-\alpha)} d\alpha = c_4 > 0$ , то величина  $\Delta\alpha \sum_{l=0}^{2J} \gamma_l \omega(\alpha_l) k_{0,l}$  при малых  $\Delta\alpha$  ограничена снизу, например, величиной  $c_4/2$ :

$$\Delta\alpha \sum_{l=0}^{2J} \gamma_l \omega(\alpha_l) k_{0,l} \geq c_4/2 > 0.$$

Переписывая (3.88), мы получаем

$$\| e^{\ell+1} \|_{\infty} \leq \sqrt{\frac{3L}{8} C (\tau^{2-\alpha} + h^4)^2} \leq \bar{C} (\tau + (\Delta\alpha)^4 + h^4).$$

Таким образом, индуктивный шаг проведен и этим заканчивается доказательство.  $\square$

Для того, чтобы проанализировать устойчивость разностной схемы (3.59а), мы также как в доказательстве сходимости можем использовать дискретный энергетический метод.

Пусть  $\{\nu_i^k \mid 0 \leq i \leq M, \quad 0 \leq k \leq N\}$  — решение

$$\Delta\alpha \sum_{l=0}^{2J} \gamma_l \omega(\alpha_l) \mathfrak{A} \left[ \omega_1 \nu^k + \sum_{m=1}^{k-1} (\omega_{k-m+1} - \omega_{k-m}) \nu^m - \omega_k \nu^0 + \sigma \frac{(\nu_i^{k+1} - \nu_i^k)}{2^{1-\alpha_l}} \right]$$



$$= K \delta_x^2 \nu_i^{k+1/2} + \mathfrak{A}f(x_i, t_{k+1/2}, \frac{3}{2}\nu_i^k - \frac{1}{2}\nu_i^{k-1}, \frac{1}{2}\nu_i^{k+1-n} + \frac{1}{2}\nu_i^{k-n}), \quad (3.89)$$

$$\nu_0^k = \phi_0(t_k), \quad \nu_M^k = \phi_L(t_k), \quad 1 \leq k \leq N, \quad (3.90)$$

$$\nu_i^k = \psi(x_i, t_k) + \rho_i^k, \quad 0 \leq i \leq M, \quad -n \leq k \leq 0, \quad (3.91)$$

где  $\rho_i^k$  — возмущение  $\psi(x_i, t_k)$ .

Следуя тем же шагам доказательства, что и в теореме сходимости, может быть получен следующий результат.

**Теорема 13.** (Теорема устойчивости.)

Пусть  $\theta_i^k = \nu_i^k - u_i^k$ ,  $0 \leq i \leq M$ ,  $-n \leq k \leq N$ . Тогда существуют такие постоянные  $c_4, c_5, h_0, \tau_0$  что выполняется

$$\|\theta^k\|_\infty \leq c_4 \sqrt{\tau} \sum_{k=-n}^0 \|\rho^k\|, \quad 0 \leq k \leq N, \quad \|\rho^k\| = \sqrt{h \sum_{i=1}^{M-1} (\phi_i^k)^2},$$

если

$$h \leq h_0, \quad \tau \leq \tau_0, \quad \max_{\substack{-n \leq k \leq 0 \\ 0 \leq i \leq M}} |\rho_i^k| \leq c_5.$$

### 3.7 Численные эксперименты

Пусть  $u_i^k = u(k\tau, h)$  — решение сконструированной разностной схемы (3.11a)–(3.11c) с шагами  $\tau, h$ . Обозначим максимальную ошибку  $E(\tau, h) = \max_{\substack{0 \leq i \leq M \\ 0 \leq k \leq N}} \|U_i^k - u_i^k\|_\infty$ . Введем уровни

$$\text{ошибки относительно шагов } rate_1 = \log_2 \left( \frac{E(2\tau, h)}{E(\tau, h)} \right), \quad rate_2 = \log_2 \left( \frac{E(\tau, 2h)}{E(\tau, h)} \right).$$

**Пример 1.** Рассмотрим следующий тестовый пример

$$\frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + f(x, t, u(x, t), u(x, t - s)), \quad t \in (0, 1), \quad 0 < x < 2, \quad (3.92)$$

$$f(x, t, u(x, t), u(x, t - s)) = \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(3-\alpha)} (2x - x^2) t^{2-\alpha} + 2t^2 - u(x, t - s) + x(2 - x)(t - s)^2,$$

с начальными и граничными условиями

$$u(x, t) = t^2(2x - x^2), \quad 0 \leq x \leq 2, \quad t \in [-s, 0], \quad (3.93)$$

$$u(0, t) = u(2, t) = 0, \quad t \in [0, 1]. \quad (3.94)$$

Точным решением задачи является функция

$$u(x, t) = t^2(2x - x^2). \quad (3.95)$$

**Пример 2.** Рассмотрим следующий тестовый пример

$$\frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + f(x, t, u(x, t), u(x, t - s)), \quad t \in (0, 1), \quad 0 < x < 1, \quad (3.96)$$

$$f(x, t, u(x, t), u(x, t - s)) = \frac{\Gamma(7/2)}{\Gamma(7/2 - \alpha)}(x^2 - x)t^{5/2 - \alpha} - 2t^{5/2} + u^2(x, t - s) - (x^2 - x)^2(t - s)^5,$$

с начальными и граничными условиями

$$u(x, t) = t^{\frac{5}{2}}(x - x^2), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t \in [-s, 0], \quad (3.97)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad t \in [0, 1]. \quad (3.98)$$

Точным решением задачи является функция

$$u(x, t) = t^{\frac{5}{2}}(x^2 - x). \quad (3.99)$$

Таблица 3.1: Погрешности и порядки сходимости разностной схемы (3.11a)–(3.11c) при изменении шага по времени при  $h = 1/300$  и  $\alpha = 0.25$  с запаздыванием  $s = 1$ .

| $\tau$          | $E(\tau, h)$ | $rate_1$ |
|-----------------|--------------|----------|
| $\frac{1}{10}$  | 0.00113      |          |
| $\frac{1}{20}$  | 0.00034      | 1.735    |
| $\frac{1}{40}$  | 0.0001       | 1.742    |
| $\frac{1}{80}$  | 0.00003      | 1.748    |
| $\frac{1}{160}$ | 0.000009     | 1.752    |

Таблица 3.2: Погрешности и порядки сходимости разностной схемы (3.11a)–(3.11c) при изменении шага по пространству при  $\tau = 1/1000$  и  $\alpha = 0.25$  с запаздыванием  $s = 1$ .

| $h$            | $E(\tau, h)$ | $rate_2$ |
|----------------|--------------|----------|
| $\frac{1}{4}$  | 0.0025       |          |
| $\frac{1}{8}$  | 0.00017      | 3.863    |
| $\frac{1}{16}$ | 0.00001      | 3.895    |
| $\frac{1}{32}$ | 0.0000007    | 3.942    |
| $\frac{1}{64}$ | 0.0000004    | 3.975    |

Таблица 3.3: Погрешности и порядки сходимости разностной схемы (3.11a)–(3.11c) при изменении шага по времени при  $h = 1/500$  и  $\alpha = 0.75$  с запаздыванием  $s = 0.5$ .

| $\tau$          | $E(\tau, h)$ | $rate_1$ |
|-----------------|--------------|----------|
| $\frac{1}{10}$  | 0.00112      |          |
| $\frac{1}{20}$  | 0.00047      | 1.245    |
| $\frac{1}{40}$  | 0.00019      | 1.248    |
| $\frac{1}{80}$  | 0.00008      | 1.249    |
| $\frac{1}{160}$ | 0.00003      | 1.252    |

Таблицы (3.1), (3.2) и (3.3), (3.4) показывают максимальную ошибку и порядок сходимости для дробных моделей (3.92) – (3.95) и (3.96) – (3.99) соответственно. Из этих таблиц можно видеть, что вычисленные порядки сходимости подтверждают теоретические результаты.

### 3.8 Численные эксперименты для случая распределенного порядка

Пусть  $u_i^k$  – решение сконструированной разностной схемы (3.11a)–(3.11c) с шагами  $\tau, h$ . Обозначим максимальную ошибку  $E(\tau, h) = \max_{\substack{0 \leq i \leq M \\ 0 \leq k \leq N}} \|U_i^k - u_i^k\|_\infty$ . Введем уровни ошибки относительно шагов  $rate_1 = \log_2 \left( \frac{E(2\tau, h, \Delta\alpha)}{E(\tau, h, \Delta\alpha)} \right)$ ,  $rate_2 = \log_2 \left( \frac{E(16\tau, 2h, 2\Delta\alpha)}{E(\tau, h, \Delta\alpha)} \right)$ . Будем использовать обозначения такие же, как в предыдущем разделе и протестируем разностную схему (3.59). Мы адаптируем численный пример из [131].

#### Пример 3.

$$\int_0^1 \Gamma(3 - \alpha) \frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial t^\alpha} d\alpha = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + f(x, t, u(x, t), u(x, t - s)), \quad t \in (0, 1), \quad 0 < x < 2, \quad (3.100)$$

$$f(x, t, u(x, t), u(x, t - s)) = \frac{6(t^2 - t)(2 - x)x}{\ln(t)} - u(x, t - s) + 2t^2 + x(2 - x)(t - s)^2,$$

со следующими начальными и граничными условиями

$$u(x, t) = t^2(2x - x^2), \quad 0 \leq x \leq 2, \quad t \in [-s, 0], \quad s > 0, \quad (3.101)$$

$$u(0, t) = u(2, t) = 0, \quad t \in [0, 1]. \quad (3.102)$$

Аналитическое решение этой задачи

$$u(x, t) = t^2(2x - x^2). \quad (3.103)$$

#### Пример 4.

$$\int_0^1 \Gamma\left(\frac{7}{2} - \alpha\right) \frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial t^\alpha} d\alpha = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + f(x, t, u(x, t), u(x, t - s)), \quad t \in (0, 1), \quad 0 < x < 1, \quad (3.104)$$

Таблица 3.4: Погрешности и порядки сходимости разностной схемы (3.11a)–(3.11c) при изменении шага по пространству при  $\tau = 1/2000$  и  $\alpha = 0.25$  с запаздыванием  $s = 0.5$ .

| $h$            | $E(\tau, h)$ | $rate_2$ |
|----------------|--------------|----------|
| $\frac{1}{4}$  | 0.0121       |          |
| $\frac{1}{8}$  | 0.00076      | 3.98     |
| $\frac{1}{16}$ | 0.00005      | 3.995    |
| $\frac{1}{32}$ | 0.000003     | 3.998    |
| $\frac{1}{64}$ | 0.0000001    | 4.01     |

$$f(x, t, u(x, t), u(x, t - s)) = \frac{15\sqrt{\pi}(t-1)t^{\frac{3}{2}}(x-1)x}{8\ln(t)} + u^2(x, t - s) - 2t^{\frac{5}{2}} - (x^2 - x)^2(t - s)^5,$$

со следующими начальными и граничными условиями

$$u(x, t) = t^{\frac{5}{2}}(x - x^2), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t \in [-s, 0], \quad s > 0, \quad (3.105)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad t \in [0, 1]. \quad (3.106)$$

Аналитическое решение этой задачи

$$u(x, t) = t^{\frac{5}{2}}(x^2 - x). \quad (3.107)$$

В таблицах 3.5 и 3.7 оценка погрешности численного решения вычисляется для примеров (4.27) и (4.31) соответственно, шаг по времени меняется, шаги  $h$  и  $\Delta\alpha$  зафиксированы достаточно малыми, параметр запаздывания  $s = 1$ ,  $s = 0.5$  соответственно. Ошибки приближения дробной производной по времени доминируют по сравнению ошибками приближения производной по пространству и распределенного порядка. Из этих таблиц мы можем сделать вывод, что порядок сходимости по шагу времени первый, согласуется с теоретическими результатами.

В таблицах 3.6 и 3.8 представлены вычислительные результаты с оптимальным соотношением шагов, т.е.  $N = M^4 = (2J)^4$ . Из них можно сделать вывод, что временной шаг  $h$

Таблица 3.5: Погрешности и порядки сходимости разностной схемы (3.59) при изменении шага по времени при  $h = 1/300$  и  $\Delta\alpha = 1/300$ .

| $\tau$          | $E(\tau, h, \Delta\alpha)$ | $rate_1$ |
|-----------------|----------------------------|----------|
| $\frac{1}{10}$  | 0.00135                    |          |
| $\frac{1}{20}$  | 0.00068                    | 0.9784   |
| $\frac{1}{40}$  | 0.000344                   | 0.9825   |
| $\frac{1}{80}$  | 0.00017                    | 0.9876   |
| $\frac{1}{160}$ | 0.000087                   | 0.9935   |
| $\frac{1}{320}$ | 0.000044                   | 0.9978   |
| $\frac{1}{640}$ | 0.0000218                  | 0.9996   |

Таблица 3.6: Погрешности и порядки сходимости разностной схемы (3.59) при оптимальном соотношении шагов.

| $\tau$              | $h$            | $\Delta\alpha$ | $E(\tau, h, \Delta\alpha)$ | $rate_2$ |
|---------------------|----------------|----------------|----------------------------|----------|
| $\frac{1}{2(4^3)}$  | $\frac{2}{8}$  | $\frac{1}{4}$  | 0.000216                   |          |
| $\frac{1}{4(8^3)}$  | $\frac{2}{16}$ | $\frac{1}{8}$  | 0.0000130754               | 4.0521   |
| $\frac{1}{8(16^3)}$ | $\frac{2}{32}$ | $\frac{1}{16}$ | $8.1371 \times 10^{-7}$    | 4.0062   |

и шаг для дискретизации распределенного порядка  $\Delta\alpha$  дают второй и четвертый порядок сходимости соответственно.

### 3.9 Заключение

Главная задача этой главы состояла в конструировании линеаризованной разностной схемы для решения класса уравнений диффузии с дробной производной по времени и с нелинейным запаздыванием, а также для уравнения диффузии с распределенной по времени дробной производной. Построены разностные схемы для сосредоточенной дробной производной по времени с учетом эффекта запаздывания, проведен анализ устойчивости и сходимости схем. Проведенные численные эксперименты подтверждают полученные теоретические результаты. Конструкции разностных схем переносятся на случай распределенного порядка. Далее мы предполагаем для повышения порядка сходимости рассмотреть аппроксимацию производной Капуто в точках  $t_{k+1/2}$ , что позволит повысить порядок сходимости до  $3 - \alpha$ .

Таблица 3.7: Погрешности и порядки сходимости разностной схемы (3.59) при изменении шага по времени при  $h = 1/500$  и  $\Delta\alpha = 1/400$ .

| $\tau$          | $E(\tau, h, \Delta\alpha)$ | $rate_1$ |
|-----------------|----------------------------|----------|
| $\frac{1}{10}$  | 0.00123                    |          |
| $\frac{1}{20}$  | 0.00062                    | 0.9853   |
| $\frac{1}{40}$  | 0.0003                     | 0.9931   |
| $\frac{1}{80}$  | 0.00016                    | 0.9952   |
| $\frac{1}{160}$ | 0.000078                   | 0.9976   |
| $\frac{1}{320}$ | 0.000039                   | 0.9985   |

Таблица 3.8: Погрешности и порядки сходимости разностной схемы (3.59) при оптимальном соотношении шагов.

| $\tau$           | $h$            | $\Delta\alpha$ | $E(\tau, h, \Delta\alpha)$ | $rate_2$ |
|------------------|----------------|----------------|----------------------------|----------|
| $\frac{1}{6^4}$  | $\frac{1}{6}$  | $\frac{1}{6}$  | 0.000135                   |          |
| $\frac{1}{12^4}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{12}$ | $8.69397 \times 10^{-6}$   | 3.9568   |
| $\frac{1}{24^4}$ | $\frac{1}{24}$ | $\frac{1}{24}$ | $5.48064 \times 10^{-7}$   | 3.9876   |

## Глава 4

# Численное решение дробного волнового уравнения с запаздыванием

### 4.1 Введение

Дробным волновым уравнением (иногда диффузионно-волновым) называют уравнение с дробной производной по времени порядка от единицы до двух и производной по пространству второго порядка. Мы будем рассматривать диффузионно-волновое уравнение, в котором порядок производной по времени распределен по отрезку [1, 2]. Уравнения распределенных порядков моделируют многие проблемы математической физики и инженерии [30–32, 85]. В частности, дробно-распределенное диффузионно-волновое уравнение (DOFDWE) рассматривалось во многих реалистичных моделях. В работе [33] использовалось DOFDWE в конечной области, чтобы смоделировать и изучить волны в вязкоупругом стержне конечной длины. Переводя граничные условия на смещении, авторы получили смещение и релаксацию напряжения в примере, рассматриваемом в [33]. В работе [34] получены специальные решения, соответствующие медленному росту осцилляций. В работе [152] представлены новые уравнения для проникновения и поглощения образований в пористых материалах на основе дробного распределенного уравнения Фоккера–Планка. Позже, в работе [153] использована теория DOFDWE для того, чтобы изучить радиальный поток грунтовой воды.

В работе [122] изучались сильные решения и стохастические аналоги для дробного распределенного уравнения на ограниченных областях с граничными условиями Дирихле. В [114] обсуждает единственность и существование решения для краевых задач обобщенного дробного распределенного по времени уравнения в открытой ограниченной области. Фундаментальные решения DOFDWE, трактуемые как плотность вероятности вводились в [82]. В последнее время, чтобы преодолеть сложность получения точных решений для DOFDWE с одной и двумя пространственными переменными, разрабатывались приближенные подходы

на основе методов конечных разностей и других численных алгоритмов [67, 78, 79, 97, 131, 170].

Запаздывание по времени появляется во многих приложениях, в том числе и описываемых диффузионными и волновыми уравнениями [62, 161]. Теория уравнений с запаздыванием представляет большой интерес у исследователей и быстро развивается [166, 172]. Пространственно-временная динамика диффузионной модели хищник–жертва Холлинга–Теннера с дискретным временем была проанализирована аналитически и численно в [53], при этом было проведено исследование запаздывания по времени. Числовой алгоритм был обсужден в модели бегущей волны в недавно сформулированном парадоксе дрейфа популяции, описываемой уравнением диффузии с запаздыванием [89]. Модель эпидемии с диффузией и запаздыванием была введена в [113] и исследовалась путем численного моделирования.

Численные методы решения, основанные на разностных схемах для уравнений реакций–диффузии с запаздыванием были предложены в [175, 176]. Линеаризованные квазикompактные разностные схемы для полулинейных дробных по времени уравнений диффузии с постоянным запаздыванием были предложены в [84].

Как продолжение и расширение результатов предыдущей главы, мы будем конструировать линейную разностную схему для DOFDWE с запаздыванием, а именно, мы рассмотрим задачу

$$\int_1^2 \omega(\alpha) \frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial t^\alpha} d\alpha = K \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + f(x, t, u(x, t), u(x, t - s)), \quad t > 0, \quad 0 \leq x \leq L, \quad (4.1a)$$

со следующими начальными и граничными условиями

$$u(x, t) = \tilde{r}(x, t), \quad 0 \leq x \leq L, \quad t \in [-s, 0], \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \tilde{\psi}(x) = \lim_{t \rightarrow -0} \frac{\partial \tilde{r}(x, t)}{\partial t}, \quad (4.1b)$$

$$u(0, t) = \phi_0(t), \quad u(L, t) = \phi_L(t), \quad t > 0, \quad (4.1c)$$

где  $s > 0$  — параметр запаздывания,  $K$  — положительная постоянная, и  $\omega(\alpha) > 0$  — весовая функция. Дробная производная определена в смысле Капуто.

Для того, чтобы преобразовать задачу (4.1) в задачу с нулевыми граничными условиями Дирихле, определим  $h(x, t) := \phi_0(t) + \frac{x}{L}(\phi_L(t) - \phi_0(t))$  и введем новую искомую функцию  $v(x, t) = u(x, t) - h(x, t)$ . Следовательно, получим

$$\int_1^2 \omega(\alpha) \frac{\partial^\alpha v(x, t)}{\partial t^\alpha} d\alpha = K \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} + f(x, t, v(x, t), v(x, t - s)), \quad t > 0, \quad 0 \leq x \leq L, \quad (4.2a)$$

со следующими начальными и граничными условиями

$$v(x, t) = r(x, t), \quad 0 \leq x \leq L, \quad t \in [-s, 0], \quad \frac{\partial v(x, 0)}{\partial t} = \psi(x), \quad (4.2b)$$

$$v(0, t) = v(L, t) = 0, \quad t > 0. \quad (4.2c)$$

Как и в предыдущей главе, мы имеем для численного решения (4.2) два усложняющих

фактора: с одной стороны, распределенный порядок производной, с другой стороны, нелинейная функция запаздывания.

Далее в этой главе, мы предположим, что функция  $f(x, t, \mu, v)$  и решение  $u(x, t)$  системы (4.2) достаточно гладкие в следующем смысле:

- Пусть  $m$  — целое, удовлетворяющее условию  $ms \leq T < (m + 1)s$ , определим  $I_r = (rs, (r + 1)s)$ , для  $r = -1, 0, \dots, m - 1$ ,  $I_m = (ms, T)$ ,  $I = \bigcup_{q=-1}^m I_q$  и предположим, что  $u(x, t) \in C^{(6,3)}([0, L] \times (0, T])$ ,

- Частные производные  $f_\mu(x, t, \mu, v)$  и  $f_v(x, t, \mu, v)$  непрерывны в  $\epsilon_0$ -окрестности решения.

Определим

$$c_1 = \sup_{\substack{0 < x < L, 0 < t \leq T \\ |\epsilon_1| \leq \epsilon_0, |\epsilon_2| \leq \epsilon_0}} |f_\mu(x, t, u(x, t) + \epsilon_1, u(x, t - s) + \epsilon_2)|, \quad (4.3a)$$

$$c_2 = \max_{\substack{0 < x < L, 0 < t \leq T \\ |\epsilon_1| \leq \epsilon_0, |\epsilon_2| \leq \epsilon_0}} |f_v(x, t, u(x, t) + \epsilon_1, u(x, t - s) + \epsilon_2)|. \quad (4.3b)$$

## 4.2 Конструирование разностной схемы

Выведем численный алгоритм, основанный на методе Кранка-Никольсон.

Сначала адаптируем квадратурную формулу для того, чтобы свести диффузионно-волновое уравнение распределенного порядка (4.2a) к диффузионно-волновому уравнению со многими дробными порядками. Запишем формулу составную Симпсона (доказательство можно найти в любом учебнике по численным методам, например, [35]).

**Лемма 24.** *Рассмотрим равномерное разбиение отрезка  $[1, 2]$  на  $2J$  подотрезка, пусть  $\Delta\alpha = \frac{1}{2J}$  и обозначим  $\alpha_l = 1 + l\Delta\alpha$ ,  $0 \leq l \leq 2J$ . Тогда справедлива составная формула Симпсона*

$$\int_1^2 f(\alpha) d\alpha = \Delta\alpha \sum_{l=0}^{2J} \gamma_l f(\alpha_l) - \frac{(\Delta\alpha)^4}{180} f^{(4)}(\zeta), \quad \zeta \in [1, 2], \quad (4.4)$$

где

$$\gamma_l = \begin{cases} \frac{1}{3}, & l = 0, 2J, \\ \frac{2}{3}, & l = 2, 4, \dots, 2J - 4, 2J - 2, \\ \frac{4}{3}, & l = 1, 3, \dots, 2J - 3, 2J - 1. \end{cases}$$

Введем обозначения. Возьмем два положительных целых числа  $M$  и  $n$ , пусть  $h = \frac{L}{M}$ ,  $\tau = \frac{s}{n}$ , обозначим  $x_i = ih$ ,  $t_k = k\tau$  и  $t_{k+1/2} = (k + \frac{1}{2})\tau = \frac{1}{2}(t_k + t_{k+1})$ . Покроем пространственно-временную область сеткой  $\Omega_{h\tau} = \Omega_h \times \Omega_\tau$ , где  $\Omega_h = \{x_i \mid 0 \leq i \leq M\}$  и  $\Omega_\tau = \{t_k \mid -n \leq k \leq N\}$ . Пусть  $W$  — пространство сеточных функций, определенных на  $\Omega_{h\tau}$ . Для  $w \in W$  определим  $W_i^{k-1/2} = \frac{1}{2}(W_i^k + W_i^{k-1})$ .



**Лемма 25** ([176]). Пусть  $q(x) \in C^6([x_{i-1}, x_{i+1}])$ , тогда

$$\frac{1}{12} (q''(x_{i-1}) + 10q''(x_i) + q''(x_{i+1})) - \frac{1}{h^2} (q(x_{i-1}) - 2q(x_i) + q(x_{i+1})) = \frac{h^4}{240} q^{(6)}(\omega_i),$$

где  $\omega_i \in (x_{i-1}, x_{i+1})$ .

Определим функцию  $G(\cdot; x_i, t_j) : \alpha \mapsto \omega(\alpha) \frac{\partial^\alpha v(x_i, t_j)}{\partial t^\alpha}$ . Предположим, что  $G(\alpha) \in C^4([1, 2])$ , тогда используя лемму 24, аппроксимируем распределенную производную

$$\begin{aligned} \int_1^2 \omega(\alpha) \frac{\partial^\alpha v(x_i, t_{k-1/2})}{\partial t^\alpha} d\alpha &= \Delta\alpha \sum_{l=0}^{2J} \gamma_l \omega(\alpha_l) {}^C D_t^{\alpha_l} v(x_i, t_{k-1/2}) - \frac{(\Delta\alpha)^4}{180} G^{(4)}(\alpha; x_i, t_{k-1/2}) \Big|_{\alpha=\zeta_i^k}, \\ &= \Delta\alpha \sum_{l=0}^{2J} \gamma_l \omega(\alpha_l) {}^C D_t^{\alpha_l} v(x_i, t_{k-1/2}) + O(\Delta\alpha)^4, \end{aligned} \quad (4.5)$$

где  $\zeta_i^k \in [1, 2]$ .

В работе [71] приведена аппроксимация для дробной производной в  $t_{k-1/2}$  с  $1 < \alpha_l < 2$ :

$$\frac{\partial^{\alpha_l} v(x_i, t_{k-1/2})}{\partial t^{\alpha_l}} = \frac{1}{\bar{\mu}_l} \left( b_0^{\alpha_l} \delta_t V_i^{k-1/2} - \sum_{j=1}^{k-1} (b_{k-j-1}^{\alpha_l} - b_{k-j}^{\alpha_l}) \delta_t V_i^{j-1/2} - b_{k-1}^{\alpha_l} \psi(x_i) \right) + r_k^l, \quad (4.6a)$$

где

$$b_k^{\alpha_l} = \frac{\tau^{2-\alpha_l}}{2-\alpha_l} ((k+1)^{2-\alpha_l} - k^{2-\alpha_l}), \quad \bar{\mu}_l = \tau \Gamma(2-\alpha_l), \quad (4.6b)$$

$$|r_k^l| \leq \frac{1}{\Gamma(3-\alpha_l)} \left( \frac{2-\alpha_l}{12} + \frac{2^{3-\alpha_l}}{3-\alpha_l} - (1+2^{1-\alpha_l}) + \frac{1}{12} \right) \max_{0 \leq t \leq t_k} \left| \frac{\partial^3 v}{\partial t^3} \right| \tau^{3-\alpha_l}, \quad l = 0, \dots, 2J, \quad (4.6c)$$

и для любой функции  $v : [0, L] \times [-s, +\infty) \rightarrow R$  обозначено  $v(x_i, t_j) = V_i^j$  for  $i \in \mathbb{N}$ ,  $j \in \mathbb{Z}$  и определено

$$V_i^{k-1/2} = \frac{1}{2} (V_i^k + V_i^{k-1}), \quad \delta_t V_i^{k-1/2} = \frac{1}{\tau} (V_i^k - V_i^{k-1}), \quad (4.6d)$$

$$\delta_x V_{i-1/2}^k = \frac{1}{h} (V_i^k - V_{i-1}^k), \quad \delta_x^2 V_i^k = \frac{1}{h} (\delta_x V_{i+1/2}^k - \delta_x V_{i-1/2}^k) = \frac{1}{h^2} (V_{i+1}^k - 2V_i^k + V_{i-1}^k). \quad (4.6e)$$

Применяя формулы (4.5) – (4.6) к (4.2a) в точках  $(x_i, t_{k-1/2})$ , получаем

$$\begin{aligned} &\Delta\alpha \sum_{l=0}^{2J} \gamma_l \omega(\alpha_l) \left[ \frac{1}{\bar{\mu}_l} \left( b_0^{\alpha_l} \delta_t V_i^{k-1/2} - \sum_{j=1}^{k-1} (b_{k-j-1}^{\alpha_l} - b_{k-j}^{\alpha_l}) \delta_t V_i^{j-1/2} - b_{k-1}^{\alpha_l} \psi(x_i) \right) + r_k^l \right] + O(\Delta\alpha^4) \\ &= K \frac{\partial^2 v(x_i, t_{k-1/2})}{\partial x^2} + f(x_i, t_{k-1/2}, v(x_i, t_{k-1/2}), v(x_i, t_{k-1/2} - s)), \quad i = 0, \dots, M, \quad k = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (4.7)$$

**Лемма 26.** Пусть для  $g = (g_0, g_1, \dots, g_M)$ , определен линейный оператор  $\mathfrak{A}$

$$\mathfrak{A}g_i = \frac{1}{12} (g_{i-1} + 10g_i + g_{i+1}), \quad 1 \leq i \leq M-1.$$

Тогда мы получаем

$$\begin{aligned} \Delta\alpha \sum_{l=0}^{2J} \gamma_l \omega(\alpha_l) \mathfrak{A} \left[ \frac{1}{\bar{\mu}_l} \left( b_0^{\alpha_l} \delta_t V_i^{k-1/2} - \sum_{j=1}^{k-1} (b_{k-j-1}^{\alpha_l} - b_{k-j}^{\alpha_l}) \delta_t V_i^{j-1/2} - b_{k-1}^{\alpha_l} \psi(x_i) \right) \right] \\ = K \delta_x^2 V_i^{k-1/2} + \mathfrak{A} f \left( x_i, t_{k-1/2}, \frac{3}{2} V_i^{k-1} - \frac{1}{2} V_i^{k-2}, \frac{1}{2} V_i^{k-n-1} + \frac{1}{2} V_i^{k-n} \right) + R_i^{k-1/2}, \end{aligned} \quad (4.8)$$

где

$$\left| R_i^{k-1/2} \right| \leq \bar{C} \left( \tau^{3-\alpha_{2J}} + (\Delta\alpha)^4 + h^4 \right), \quad 1 \leq i \leq M-1, \quad 1 \leq k \leq N. \quad (4.9)$$

*Доказательство.* Используя разложения Тейлора

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v(x_i, t_{k-1/2})}{\partial x^2} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 v(x_i, t_k)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x_i, t_{k-1})}{\partial x^2} \right) + O(\tau^2), \\ v(x_i, t_{k-1/2}) &= \frac{3}{2} V_i^{k-1} - \frac{1}{2} V_i^{k-2} + O(\tau^2), \\ v(x_i, t_{k-1/2} - s) &= \frac{1}{2} V_i^{k-n} + \frac{1}{2} V_i^{k-n-1} + O(\tau^2) \end{aligned}$$

в (4.7), мы получаем

$$\begin{aligned} \Delta\alpha \sum_{l=0}^{2J} \gamma_l \omega(\alpha_l) \left[ \frac{1}{\bar{\mu}_l} \left( b_0^{\alpha_l} \delta_t V_i^{k-1/2} - \sum_{j=1}^{k-1} (b_{k-j-1}^{\alpha_l} - b_{k-j}^{\alpha_l}) \delta_t V_i^{j-1/2} - b_{k-1}^{\alpha_l} \psi(x_i) \right) + r_k^l \right] + O(\Delta\alpha^4) \\ = \frac{K}{2} \left( \frac{\partial^2 v(x_i, t_k)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x_i, t_{k-1})}{\partial x^2} \right) + f \left( x_i, t_{k-1/2}, \frac{3}{2} V_i^{k-1} - \frac{1}{2} V_i^{k-2}, \frac{1}{2} V_i^{k-n} + \frac{1}{2} V_i^{k-n-1} \right), \end{aligned} \quad (4.10)$$

где мы использовали непрерывность производных  $f$  по третьему и четвертому аргументу, когда  $\tau \rightarrow 0$ .

В соответствие с леммой 25, мы получаем

$$\mathfrak{A} \left[ \frac{\partial^2 v(x_i, t_k)}{\partial x^2} \right] = \delta_x^2 V_i^k + \frac{h^4}{240} \frac{\partial^6 v}{\partial x^6} (\theta_i^k, t_k), \quad \theta_i^k \in (x_{i-1}, x_{i+1}),$$

таким образом, применяя  $\mathfrak{A}$  к соотношению (4.10) мы выводим, используя (4.6e),

$$\begin{aligned} \Delta\alpha \sum_{l=0}^{2J} \gamma_l \omega(\alpha_l) \mathfrak{A} \left[ \frac{1}{\bar{\mu}_l} \left( b_0^{\alpha_l} \delta_t V_i^{k-1/2} - \sum_{j=1}^{k-1} (b_{k-j-1}^{\alpha_l} - b_{k-j}^{\alpha_l}) \delta_t V_i^{j-1/2} - b_{k-1}^{\alpha_l} \psi(x_i) \right) + r_k^l \right] + \\ O(\Delta\alpha^4) + O(h^4) = \frac{K}{2} \delta_x^2 (V_i^k + V_i^{k-1}) + \mathfrak{A} f \left( x_i, t_{k-1/2}, \frac{3}{2} V_i^{k-1} - \frac{1}{2} V_i^{k-2}, \frac{1}{2} V_i^{k-n} + \frac{1}{2} V_i^{k-n-1} \right), \end{aligned}$$

так как  $v(x, t) \in C^{(6,3)}([0, L] \times (0, T])$ . Определим  $R_i^{k-1/2} = \Delta\alpha \sum_{l=0}^{2J} \gamma_l \omega(\alpha_l) \mathfrak{A} r_k^l + O(\Delta\alpha^4) + O(h^4)$ , тогда из (4.6с), следует, что  $\max_{0 \leq l \leq 2J} \alpha_l = \alpha_{2J} = 2$  и так как  $\Delta\alpha \sum_{l=0}^{2J} \gamma_l \omega(\alpha_l)$  ограничена, оценка (4.9) достигнута и доказательство завершено.  $\square$

Окончательный вид разностной схемы мы получаем, пренебрегая  $R_i^{k-1/2}$  и заменяя  $V_i^k$  на

$v_i^k$  в (4.8)

$$\begin{aligned} & \Delta\alpha \sum_{l=0}^{2J} \gamma_l \omega(\alpha_l) \mathfrak{A} \left[ \frac{1}{\mu_l} \left( b_0^{\alpha_l} \delta_t v_i^{k-1/2} - \sum_{j=1}^{k-1} (b_{k-j-1}^{\alpha_l} - b_{k-j}^{\alpha_l}) \delta_t v_i^{j-1/2} - b_{k-1}^{\alpha_l} \psi(x_i) \right) \right] \\ & = K \delta_x^2 v_i^{k-1/2} + \mathfrak{A} f \left( x_i, t_{k-1/2}, \frac{3}{2} v_i^{k-1} - \frac{1}{2} v_i^{k-2}, \frac{1}{2} v_i^{k-n-1} + \frac{1}{2} v_i^{k-n} \right), \quad 1 \leq i \leq M-1, \quad 1 \leq k \leq N, \end{aligned} \quad (4.11a)$$

с начальными и граничными условиями

$$v_0^k = \phi_0(t_k), \quad v_M^k = \phi_L(t_k), \quad 1 \leq k \leq N, \quad (4.11b)$$

$$v_i^k = r(x_i, t_k), \quad 0 \leq i \leq M, \quad -n \leq k \leq 0. \quad (4.11c)$$

Вспоминая, что  $v(x_i, t_k) = V_i^k$  и  $v_i^k$  — решение разностной схемы, надеемся, что  $v(x_i, t_k) \approx v_i^k$ , т.е.  $\epsilon_i^k = |V_i^k - v_i^k| \rightarrow 0$ , этот вопрос мы обсудим в следующем разделе.

### 4.3 Разрешимость, сходимость и устойчивость разностной схемы

Чтобы рассмотреть теоремы единственности, устойчивости и сходимости в норме  $L_\infty$  для предложенной разностной схемы с использованием дискретного энергетического метода, будем использовать обозначения главы 3.

Для анализа разностных схем нам будут нужны следующие утверждения

**Лемма 27** ([71]). Пусть  $v \in V_h$ , тогда  $\|\delta_x^2 v\| \leq \frac{2}{h} \|v\|_1$ .

**Лемма 28** ([17]). Пусть  $v \in V_h$  и  $v_0 = v_M = 0$ . Тогда  $\|v\|_\infty \leq \frac{\sqrt{L}}{2} \|v\|_1$ .

**Лемма 29** ([155]). Для любого  $G = \{G_1, G_2, G_3, \dots\}$  и  $\psi$ , мы получаем

$$\sum_{k=1}^m \left[ b_0^\alpha G_k - \sum_{j=1}^{k-1} (b_{k-j-1}^{\alpha_l} - b_{k-j}^{\alpha_l}) G_j - b_{k-1}^{\alpha_l} \psi \right] G_k \geq \frac{t_m^{1-\alpha_l}}{2(2-\alpha_l)} \tau \sum_{k=1}^m G_k^2 - \frac{t_m^{2-\alpha_l}}{2(2-\alpha_l)} \psi^2, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Сейчас докажем, что наша разностная схема имеет единственное решение.

**Теорема 14** (Разрешимость). Разностная схема (4.11) однозначно разрешима.

*Доказательство.* Мы можем представить систему (4.11) в следующем виде

$$\begin{aligned}
& \left[ \frac{\Delta\alpha}{12} \sum_{l=0}^{2J} \gamma_l \omega(\alpha_l) \frac{b_0^{\alpha_l}}{\bar{\mu}_l \tau} - \frac{K}{2h^2} \right] v_{i+1}^k + \left[ \frac{10\Delta\alpha}{12} \sum_{l=0}^{2J} \gamma_l \omega(\alpha_l) \frac{b_0^{\alpha_l}}{\bar{\mu}_l \tau} + \frac{K}{h^2} \right] v_i^k \\
& + \left[ \frac{\Delta\alpha}{12} \sum_{l=0}^{2J} \gamma_l \omega(\alpha_l) \frac{b_0^{\alpha_l}}{\bar{\mu}_l \tau} - \frac{K}{2h^2} \right] v_{i-1}^k = \left[ \frac{\Delta\alpha}{12} \sum_{l=0}^{2J} \frac{\gamma_l \omega(\alpha_l)}{\bar{\mu}_l \tau} (2b_0^{\alpha_l} - b_1^{\alpha_l}) - \frac{K}{2h^2} \right] v_{i+1}^{k-1} \\
& + \left[ \frac{10\Delta\alpha}{12} \sum_{l=0}^{2J} \frac{\gamma_l \omega(\alpha_l)}{\bar{\mu}_l \tau} (2b_0^{\alpha_l} - b_1^{\alpha_l}) + \frac{K}{h^2} \right] v_i^{k-1} + \left[ \frac{\Delta\alpha}{12} \sum_{l=0}^{2J} \frac{\gamma_l \omega(\alpha_l)}{\bar{\mu}_l \tau} (2b_0^{\alpha_l} - b_1^{\alpha_l}) - \frac{K}{2h^2} \right] v_{i-1}^{k-1} \\
& + \Delta\alpha \sum_{l=0}^{2J} \frac{\gamma_l \omega(\alpha_l)}{\bar{\mu}_l \tau} \mathfrak{A} \left( \sum_{j=1}^{k-2} (b_{k-j-1}^{\alpha_l} - b_{k-j}^{\alpha_l}) v_i^j - \sum_{j=1}^{k-1} (b_{k-j-1}^{\alpha_l} - b_{k-j}^{\alpha_l}) v_i^{j-1} + \tau b_{k-1}^{\alpha_l} \psi_i \right) \\
& + \mathfrak{A} f \left( x_i, t_{k+1/2}, \frac{3}{2} v_i^k - \frac{1}{2} v_i^{k-1}, \frac{1}{2} v_i^{k+1-n} + \frac{1}{2} v_i^{k-n} \right), \quad (4.12)
\end{aligned}$$

или представить в более краткой форме

$$Av^k = \varphi_k(v^{k-1}, v^{k-1}, \dots, v^{-n}).$$

Коэффициенты трехдиагональной матрицы  $A = (a_{ij})$  обладают диагональным преобладанием, т.е.  $a_{ii} > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ ;

$$a_{ii} = \frac{10\Delta\alpha}{12} \sum_{l=0}^{2J} \gamma_l \omega(\alpha_l) \frac{b_0^{\alpha_l}}{\bar{\mu}_l \tau} + \frac{K}{h^2}, \quad a_{i+1,i} = \frac{\Delta\alpha}{12} \sum_{l=0}^{2J} \gamma_l \omega(\alpha_l) \frac{b_0^{\alpha_l}}{\bar{\mu}_l \tau} - \frac{K}{2h^2} = a_{i-1,i}.$$

Поэтому матрица невырождена и отсюда следует заключение теоремы.  $\square$

**Теорема 15** (Сходимость). Пусть  $v(x, t) \in [0, L] \times [-s, T]$ , — решение системы (4.2),  $v(x_i, t_k) = V_i^k$  и  $v_i^k$  ( $0 \leq i \leq M, -n \leq k \leq N$ ) — решение разностной схемы (4.11), обозначим  $e_i^k = V_i^k - v_i^k$ , для  $0 \leq i \leq M, -n \leq k \leq N$ ,

$$C = \sqrt{\frac{3L}{8\theta K}} \exp\left(\frac{3}{8\theta K}(5c_1^2 + 2c_2^2)\right),$$

тогда, если

$$\tau \leq \tau_0 = \left(\frac{\epsilon_0}{6C}\right)^{1/(3-\alpha_{2J})} = \frac{\epsilon_0}{6C}, \quad h \leq h_0 = \left(\frac{\epsilon_0}{6C}\right)^{\frac{1}{4}}, \quad \Delta\alpha \leq \left(\frac{\epsilon_0}{6C}\right)^{\frac{1}{4}}, \quad (4.13)$$

то

$$\|e^k\|_{\infty} \leq C(\tau^{3-\alpha_{2J}} + (\Delta\alpha)^4 + h^4) = C(\tau + (\Delta\alpha)^4 + h^4), \quad 0 \leq k \leq N, \quad (4.14)$$

где  $c_1, c_2$  и  $\epsilon_0$  определены в (4.3).

*Доказательство.* Погрешность разностной схемы может быть получена вычитанием (4.11a)

из (4.8):

$$\Delta\alpha \sum_{l=0}^{2J} \gamma_l \omega(\alpha_l) \left[ \frac{1}{\tau\Gamma(2-\alpha_l)} \left( b_0^{\alpha_l} \delta_t e_i^{k-1/2} - \sum_{j=1}^{k-1} (b_{k-j-1}^{\alpha_l} - b_{k-j}^{\alpha_l}) \delta_t e_i^{j-1/2} \right) \right] = K \delta_x^2 e_i^{k-1/2} + R_i^{k-1/2} +$$

$$\mathfrak{A} \left[ f \left( x_i, t_{k-1/2}, \frac{1}{2} V_i^k + \frac{1}{2} V_i^{k-1}, \frac{1}{2} V_i^{k-n-1} + \frac{1}{2} V_i^{k-n} \right) - \right.$$

$$\left. f \left( x_i, t_{k-1/2}, \frac{3}{2} v_i^{k-1} - \frac{1}{2} v_i^{k-1-2}, \frac{1}{2} v_i^{k-n-1} + \frac{1}{2} v_i^{k-n} \right) \right], \quad (4.15)$$

и

$$e_0^k = 0, \quad e_M^k = 0, \quad 1 \leq k \leq N, \quad (4.16)$$

$$e_i^k = 0, \quad 0 \leq i \leq M, \quad -n \leq k \leq 0. \quad (4.17)$$

Умножим обе части (4.15) на  $h\tau\mathfrak{A}\delta_t e_i^{k-1/2}$  и просуммируем по  $i : 1 \rightarrow M-1$  и по  $k : 1 \rightarrow m$ , где  $m \leq N-1$ , получим

$$\sum_{i=1}^{M-1} \sum_{k=1}^m \Delta\alpha \sum_{l=0}^{2J} \gamma_l \omega(\alpha_l) \left[ \frac{h}{\Gamma(2-\alpha_l)} \left( b_0^{\alpha_l} \delta_t e_i^{k-1/2} - \sum_{j=1}^{k-1} (b_{k-j-1}^{\alpha_l} - b_{k-j}^{\alpha_l}) \delta_t e_i^{j-1/2} \right) \right] \mathfrak{A} \delta_t e_i^{k-1/2} =$$

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{M-1} \sum_{k=1}^m h\tau K \delta_x^2 e_i^{k-1/2} \mathfrak{A} \delta_t e_i^{k-1/2}}_{\eta_1} + \underbrace{h \sum_{i=1}^{M-1} \tau \sum_{k=1}^m R_i^{k-1/2} \mathfrak{A} \delta_t e_i^{k-1/2}}_{\eta_2} + \underbrace{h \sum_{i=1}^{M-1} \tau \sum_{k=1}^m \mathfrak{A} P_i^{k-1/2} \mathfrak{A} \delta_t e_i^{k-1/2}}_{\eta_3}, \quad (4.18)$$

$$P_i^{k-1/2} = f \left( x_i, t_{k-1/2}, \frac{3}{2} V_i^{k-1} - \frac{1}{2} V_i^{k-2}, \frac{1}{2} V_i^{k-n-1} + \frac{1}{2} V_i^{k-n} \right) -$$

$$f \left( x_i, t_{k-1/2}, \frac{3}{2} v_i^{k-1} - \frac{1}{2} v_i^{k-2}, \frac{1}{2} v_i^{k-n-1} + \frac{1}{2} v_i^{k-n} \right).$$

Докажем по индукции (4.14). База индукции очевидна: из (4.17) ясно, что  $\| e^k \|_\infty = 0$ , для  $-n \leq k \leq 0$ , в частности мы получаем  $\| e^0 \|_\infty = 0$ .

Далее, предположим, что (4.14) выполняется для  $0 \leq k < \ell$ , и покажем, что оно выполняется при  $k = \ell$ . Из индуктивного предположения, если  $\tau$ ,  $h$  и  $\Delta\alpha$  удовлетворяют (4.13), то выполняется

$$\| e^k \|_\infty \leq C (\tau^{3-2\alpha_J} + (\Delta\alpha)^4 + h^4) \leq \epsilon_0/2, \quad 0 \leq k < \ell. \quad (4.19)$$

Из (4.19) мы заключаем, что  $| e^k | \leq \epsilon_0/2$ , для  $0 \leq k < \ell$ , и

$$| V_i^{k-1} - v_i^{k-1} | \leq \epsilon_0/2, \quad | V_i^{k-2} - v_i^{k-2} | \leq \epsilon_0/2, \quad 0 \leq k < \ell.$$

следовательно,  $| (\frac{3}{2} V_i^{k-1} - \frac{3}{2} v_i^{k-1}) - (\frac{1}{2} V_i^{k-2} - \frac{1}{2} v_i^{k-2}) | \leq \epsilon_0/2$ , и следующее неравенство справедливо

$$| (\frac{3}{2} V_i^{k-1} - \frac{1}{2} V_i^{k-1}) - (\frac{3}{2} v_i^{k-1} - \frac{1}{2} v_i^{k-1}) | \leq \epsilon_0, \quad 0 \leq i \leq M, \quad 0 \leq k < \ell.$$

Тем же самым способом мы можем показать, что

$$\left| \frac{1}{2}(V_i^{k-n} + V_i^{k-n-1}) - \frac{1}{2}(v_i^{k-n} - v_i^{k-n-1}) \right| \leq \epsilon_0, \quad 0 \leq i \leq M, \quad 0 \leq k < \ell.$$

Следовательно

$$\left| P_i^{k-1/2} \right| \leq c_1 \left| \frac{3}{2}e_i^{k-1} - \frac{1}{2}e_i^{k-2} \right| + c_2 \left| \frac{1}{2}e_i^{k-n-1} + \frac{1}{2}e_i^{k-n} \right|, \quad 0 \leq i \leq M, \quad 0 \leq k < \ell,$$

тогда

$$\left| \mathfrak{A}P_i^{k-1/2} \right| \leq \mathfrak{A} \left( c_1 \left| \frac{3}{2}e_i^{k-1} - \frac{1}{2}e_i^{k-2} \right| + c_2 \left| \frac{1}{2}e_i^{k-n-1} + \frac{1}{2}e_i^{k-n} \right| \right), \quad 0 \leq i \leq M, \quad 0 \leq k < \ell. \quad (4.20)$$

Используя (4.20), мы получаем

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{M-1} \sum_{k=1}^m h\tau \left| \mathfrak{A}P_i^{k-1/2} \right| \mathfrak{A}\delta_t e_i^{k-1/2} \leq \\ & \sum_{i=1}^{M-1} \sum_{k=1}^m h\tau \mathfrak{A} \left( c_1 \left| \frac{3}{2}e_i^{k-1} - \frac{1}{2}e_i^{k-2} \right| + c_2 \left| \frac{1}{2}e_i^{k-n-1} + \frac{1}{2}e_i^{k-n} \right| \right) \mathfrak{A}\delta_t e_i^{k-1/2}, \quad 0 \leq i \leq M, \quad 0 \leq k < \ell. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Перепишем правую часть соотношения (4.21) с помощью внутреннего произведения и используя неравенство Холдера  $\langle \xi_1, \xi_2 \rangle \leq \frac{1}{2\theta} \|\xi_1\|^2 + \frac{\theta}{2} \|\xi_2\|^2$ , мы получим

$$\begin{aligned} \eta_3 & \leq \tau \sum_{k=1}^m \left[ \frac{1}{2\theta} \left\| c_1 \left| \frac{3}{2}e^{k-1} - \frac{1}{2}e^{k-2} \right| + c_2 \left| \frac{1}{2}e^{k-n-1} + \frac{1}{2}e^{k-n} \right| \right\|^2 + \frac{\theta}{2} \left\| \mathfrak{A}\delta_t e^{k-1/2} \right\|^2 \right] \\ & = \frac{\tau}{2\theta} \sum_{k=1}^m h \sum_{i=1}^{M-1} \left( c_1 \left| \frac{3}{2}e^{k-1} - \frac{1}{2}e^{k-2} \right| \right)^2 + c_2 \left( \left| \frac{1}{2}e^{k-n-1} + \frac{1}{2}e^{k-n} \right| \right)^2 + \frac{\tau\theta}{2} \sum_{k=1}^m \mathfrak{A}\delta_t e^{k-1/2} \\ & \leq \frac{5\tau c_1^2}{4\theta} \sum_{k=1}^m \left( \|e^{k-1}\|^2 + \|e^{k-2}\|^2 \right) + \frac{\tau c_2^2}{2\theta} \sum_{k=1}^m \left( \|e^{k-n}\|^2 + \|e^{k-n-1}\|^2 \right) + \frac{\tau\theta}{2} \sum_{k=1}^m \left\| \mathfrak{A}\delta_t e^{k-1/2} \right\|^2. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Для  $\eta_2$  в правой части (4.18) мы также применим неравенство Холдера и получим

$$\tau \sum_{k=1}^m \langle R^{k-1/2}, \mathfrak{A}\delta_t e^{k-1/2} \rangle \leq \frac{\tau}{2\theta} \sum_{k=1}^m \|R^{k-1/2}\|^2 + \frac{\tau\theta}{2} \sum_{k=1}^m \|\mathfrak{A}\delta_t e^{k-1/2}\|^2. \quad (4.23)$$

Для левой части (4.18) применим лемму (29) и получим что она больше или равна величины

$$\begin{aligned} h\tau \Delta \alpha \sum_{i=1}^{M-1} \sum_{k=1}^m \sum_{l=0}^{2J} \frac{\gamma_l \omega(\alpha_l)}{\Gamma(2-\alpha_l)} \frac{t_m^{1-\alpha_l}}{2} (\mathfrak{A}\delta_t e_i^{k-1/2})^2 & \geq \frac{\tau}{2} \Delta \alpha \sum_{k=1}^m \sum_{l=0}^{2J} \frac{\gamma_l \omega(\alpha_l)}{T^{\alpha_l-1} \Gamma(3-\alpha_l)} \left\| \mathfrak{A}\delta_t e^{k-1/2} \right\|^2, \\ \sum_{l=0}^{2J} \frac{\gamma_l \omega(\alpha_l)}{T^{\alpha_l-1} \Gamma(3-\alpha_l)} & \rightarrow \int_1^2 \frac{\omega(\alpha)}{T^{\alpha-1} \Gamma(3-\alpha)} d\alpha = c_4 > 0. \end{aligned}$$

и

$$\theta = \frac{\Delta\alpha}{2} \sum_{l=0}^{2J} \frac{\gamma_l \omega(\alpha_l)}{\Gamma^{\alpha_l-1} \Gamma(3-\alpha_l)}.$$

Для  $\eta_1$  в правой части (4.18), используя  $\delta_t e_0^{k-1/2} = \delta_t e_M^{k-1/2} = 0$ , мы можем получить, используя лемму 27

$$\begin{aligned} -\eta_1 &= -K \sum_{i=1}^{M-1} \sum_{k=1}^m h\tau \delta_x^2 e_i^{k-1/2} \mathfrak{A} \delta_t e_i^{k-1/2} = -K \sum_{i=1}^{M-1} \sum_{k=1}^m h\tau \delta_x^2 e_i^{k-1/2} \left[ \delta_t e_i^{k-1/2} + \frac{h^2}{12} \delta_x^2 \delta_t e_i^{k-1/2} \right] \\ &= K\tau \sum_{k=1}^m h \left[ \sum_{i=1}^{M-1} \delta_x e_{i-1/2}^{k-1/2} \delta_t \delta_x e_{i-1/2}^{k-1/2} \right] - \frac{h^2 K\tau}{12} \sum_{k=1}^m h \left[ \sum_{i=1}^{M-1} \left[ \delta_x^2 e_i^{k-1/2} \delta_x^2 \delta_t e_i^{k-1/2} \right] \right] \\ &= K \sum_{k=1}^m \left[ \frac{1}{2} \left( \|e^k\|_1^2 - \frac{h^2}{12} \|\delta_x^2 e^k\|^2 \right) - \frac{1}{2} \left( \|e^{k-1}\|_1^2 - \frac{h^2}{12} \|\delta_x^2 e^{k-1}\|^2 \right) \right] \\ &= \frac{K}{2} \left( \|e^m\|_1^2 - \frac{h^2}{12} \|\delta_x^2 e^m\|^2 \right) - \frac{K}{2} \left( \|e^0\|_1^2 - \frac{h^2}{12} \|\delta_x^2 e^0\|^2 \right) \geq \frac{K}{3} \|e^m\|_1^2. \end{aligned}$$

Подставляя это соотношение, а также (4.22), (4.23) в (4.18), а также используя (4.9), мы получаем

$$\begin{aligned} \frac{K}{3} \|e^m\|_1^2 &\leq \frac{5\tau c_1^2}{4\theta} \sum_{k=1}^m \left( \|e^{k-1}\|^2 + \|e^{k-2}\|^2 \right) + \\ &\quad \frac{\tau c_2^2}{2\theta} \sum_{k=1}^m \left( \|e^{k-n}\|^2 + \|e^{k-n-1}\|^2 \right) + \frac{\tau}{2\theta} \bar{C}^2 (\tau^{3-\alpha_2 J} + (\Delta\alpha)^4 + h^4)^2, \quad 0 \leq m < \ell, \end{aligned}$$

это означает, что

$$\|e^m\|_1^2 \leq \frac{3\tau}{2\theta K} \bar{C}^2 (\tau^{3-\alpha_2 J} + (\Delta\alpha)^4 + h^4)^2 + \frac{3\tau}{4\theta K} (5c_1^2 + 2c_2^2) \sum_{k=0}^{m-1} \|e^k\|^2, \quad 0 \leq m < \ell. \quad (4.24)$$

Если мы применим неравенство Гронуолла (лемма 19), то получим

$$\|e^\ell\|_1^2 \leq \frac{3\tau}{2\theta K} \exp\left(\frac{3\tau m}{4\theta K} (5c_1^2 + 2c_2^2)\right) \bar{C}^2 (\tau^{3-\alpha_2 J} + (\Delta\alpha)^4 + h^4)^2,$$

из чего, после применения (3.17) вытекает, так как  $\tau m \leq T$ ,

$$\|e^\ell\|_\infty \leq \bar{C} \sqrt{\frac{3L}{8\theta K}} \exp\left(\frac{3T}{8\theta K} (5c_1^2 + 2c_2^2)\right) (\tau^{3-\alpha_2 J} + (\Delta\alpha)^4 + h^4). \quad (4.25)$$

Таким образом, индуктивный шаг завершен, откуда следует заключение теоремы.  $\square$

Для того, чтобы исследовать устойчивость разностной схемы (4.11), мы должны также использовать дискретный энергетический метод подобно исследованию сходимости.

Пусть  $\{z_i^k \mid 0 \leq i \leq M, 0 \leq k \leq N\}$  — решение

$$\begin{aligned} &\Delta\alpha \sum_{l=0}^{2J} \gamma_l \omega(\alpha_l) \mathfrak{A} \left[ \frac{1}{\mu_l} \left( b_0^{\alpha_l} \delta_t z_i^{k-1/2} - \sum_{j=1}^{k-1} (b_{k-j-1}^{\alpha_l} - b_{k-j}^{\alpha_l}) \delta_t z_i^{j-1/2} - b_{k-1}^{\alpha_l} \psi(x_i) \right) \right] \\ &= K \delta_x^2 z_i^{k-1/2} + \mathfrak{A} f \left( x_i, t_{k-1/2}, \frac{3}{2} z_i^{k-1} - \frac{1}{2} z_i^{k-2}, \frac{1}{2} z_i^{k-n-1} + \frac{1}{2} z_i^{k-n} \right), \quad 1 \leq i \leq M-1, \quad 1 \leq k \leq N, \end{aligned} \quad (4.26a)$$

с начальными и граничными условиями

$$z_0^k = \phi_0(t_k), \quad z_M^k = \phi_L(t_k), \quad 1 \leq k \leq N, \quad (4.26b)$$

$$z_i^k = r(x_i, t_k) + \rho_i^k, \quad 0 \leq i \leq M, \quad -n \leq k \leq 0, \quad (4.26c)$$

где  $\rho_i^k$  — возмущение  $\psi(x_i, t_k)$ .

Подобно доказательству теоремы сходимости, доказывается следующая теорема устойчивости.

**Теорема 16** (Устойчивости). Пусть  $\theta_i^k = z_i^k - v_i^k$  для  $0 \leq i \leq M, -n \leq k \leq N$ . Тогда существуют постоянные  $c_4, c_5, h_0, \tau_0$ , такие, что выполняется

$$\|\theta^k\|_\infty \leq c_4 \sqrt{\tau} \sum_{k=-n}^0 \|\rho^k\|, \quad 0 \leq k \leq N, \quad \|\rho^k\| = \sqrt{h \sum_{i=1}^{M-1} (\rho_i^k)^2},$$

при условии

$$h \leq h_0, \quad \tau \leq \tau_0, \quad \max_{\substack{-n \leq k \leq 0 \\ 0 \leq i \leq M}} |\rho_i^k| \leq c_5.$$

## 4.4 Численные эксперименты

Рассмотрим следующее дробное диффузионно-волновое уравнение с запаздыванием.

**Пример 5.**

$$\int_1^2 \Gamma(3 - \alpha) \frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial t^\alpha} d\alpha = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + f(x, t, u(x, t), u(x, t - s)), \quad t \in (0, 1), \quad 0 < x < 2, \quad (4.27)$$

$$f(x, t, u(x, t), u(x, t - s)) = \frac{6(t - 1)(2 - x)x}{\ln(t)} - u(x, t - s) + 2t^2 + x(2 - x)(t - s)^2,$$

со следующими начальными и граничными условиями

$$u(x, t) = t^2(2x - x^2), \quad 0 \leq x \leq 2, \quad t \in [-s, 0], \quad s > 0, \quad (4.28)$$

$$u(0, t) = u(2, t) = 0, \quad t \in [0, 1]. \quad (4.29)$$

Аналитическое решение этой задачи

$$u(x, t) = t^2(2x - x^2). \quad (4.30)$$

В этом и последующих примерах будем применять следующие обозначения.

Пусть  $u_i^k$  — решение сконструированной разностной схемы (4.11) с шагами  $\tau, h$ . Обозначим максимальную ошибку  $E(\tau, h) = \max_{\substack{0 \leq i \leq M \\ 0 \leq k \leq N}} \|U_i^k - u_i^k\|_\infty$ . Введем уровни ошибки относительно шагов

$$rate_1 = \log_2 \left( \frac{E(2\tau, h, \Delta\alpha)}{E(\tau, h, \Delta\alpha)} \right), \quad rate_2 = \log_2 \left( \frac{E(16\tau, 2h, 2\Delta\alpha)}{E(\tau, h, \Delta\alpha)} \right).$$



**Пример 6.**

$$\int_1^2 \Gamma\left(\frac{7}{2} - \alpha\right) \frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial t^\alpha} d\alpha = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + f(x, t, u(x, t), u(x, t - s)), \quad t \in (0, 1), \quad 0 < x < 1, \quad (4.31)$$

$$f(x, t, u(x, t), u(x, t - s)) = \frac{15\sqrt{\pi}(t-1)t^{\frac{1}{2}}(x-1)x}{8\ln(t)} + u^2(x, t - s) - 2t^{\frac{5}{2}} - (x^2 - x)^2(t - s)^5,$$

со следующими начальными и граничными условиями

$$u(x, t) = t^{\frac{5}{2}}(x - x^2), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t \in [-s, 0), \quad s > 0, \quad (4.32)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad t \in [0, 1]. \quad (4.33)$$

Аналитическое решение этой задачи

$$u(x, t) = t^{\frac{5}{2}}(x^2 - x). \quad (4.34)$$

В таблицах (4.1) и (4.3) оценка погрешности численного решения вычисляется для примеров (4.27) и (4.31) соответственно, шаг по времени меняется, шаги  $h$  и  $\Delta\alpha$  зафиксированы достаточно малыми, параметр запаздывания  $s = 1$ ,  $s = 0.5$  соответственно. Ошибки приближения дробной производной по времени доминируют по сравнению ошибками приближения производной по пространству и распределенного порядка. Из этих таблиц мы можем сделать вывод, что порядок сходимости по шагу времени первый, согласуется с теоретическими результатами.

Таблица 4.1: Погрешности и порядки сходимости разностной схемы (4.11) для примера (4.27) при изменении шага по времени при  $h = 1/300$  и  $\Delta\alpha = 1/300$ .

| $\tau$          | $E(\tau, h, \Delta\alpha)$ | $rate_1$ |
|-----------------|----------------------------|----------|
| $\frac{1}{10}$  | 0.00129                    |          |
| $\frac{1}{20}$  | 0.00065                    | 0.979    |
| $\frac{1}{40}$  | 0.00033                    | 0.983    |
| $\frac{1}{80}$  | 0.00017                    | 0.988    |
| $\frac{1}{160}$ | 0.00008                    | 0.993    |
| $\frac{1}{320}$ | 0.00004                    | 0.998    |

Таблица 4.2: Погрешности и порядки сходимости разностной схемы (4.11) для примера (4.27) при оптимальном соотношении шагов.

| $\tau$              | $h$            | $\Delta\alpha$ | $E(\tau, h, \Delta\alpha)$ | $rate_2$ |
|---------------------|----------------|----------------|----------------------------|----------|
| $\frac{1}{2(4^3)}$  | $\frac{2}{8}$  | $\frac{1}{4}$  | 0.00032                    |          |
| $\frac{1}{4(8^3)}$  | $\frac{2}{16}$ | $\frac{1}{8}$  | 0.0000197                  | 4.02     |
| $\frac{1}{8(16^3)}$ | $\frac{2}{32}$ | $\frac{1}{16}$ | $1.23 \times 10^{-6}$      | 3.998    |

В таблицах 4.2 и 4.4 представлены вычислительные результаты с оптимальным соотношением шагов, т.е.  $N = M^4 = (2J)^4$ . Из них можно сделать вывод, что временной шаг  $h$  и шаг для дискретизации распределенного порядка  $\Delta\alpha$  дают второй и четвертый порядок сходимости соответственно.

## 4.5 Заключение

Сконструирована линейризованная разностная схема для решения класса диффузионно-волнового уравнения распределенного дробного порядка с нелинейным запаздыванием. Проведен последовательно анализ однозначной разрешимости, устойчивости и сходимости схем в терминах дискретного энергетического метода.

Таблица 4.3: Погрешности и порядки сходимости разностной схемы (4.11) для примера (4.31) при изменении шага по времени при  $h = 1/500$  и  $\Delta\alpha = 1/400$ .

| $\tau$          | $E(\tau, h, \Delta\alpha)$ | $rate_1$ |
|-----------------|----------------------------|----------|
| $\frac{1}{10}$  | 0.00116                    |          |
| $\frac{1}{20}$  | 0.00059                    | 0.982    |
| $\frac{1}{40}$  | 0.00029                    | 0.985    |
| $\frac{1}{80}$  | 0.00015                    | 0.989    |
| $\frac{1}{160}$ | 0.00007                    | 0.994    |
| $\frac{1}{320}$ | 0.00004                    | 0.999    |

Таблица 4.4: Погрешности и порядки сходимости разностной схемы (4.11) для примера (4.31) при оптимальном соотношении шагов.

| $\tau$           | $h$            | $\Delta\alpha$ | $E(\tau, h, \Delta\alpha)$ | $rate_2$ |
|------------------|----------------|----------------|----------------------------|----------|
| $\frac{1}{6^4}$  | $\frac{1}{6}$  | $\frac{1}{6}$  | 0.00012                    |          |
| $\frac{1}{12^4}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{12}$ | $7.51 \times 10^{-6}$      | 3.997    |
| $\frac{1}{24^4}$ | $\frac{1}{24}$ | $\frac{1}{24}$ | $5.7 \times 10^{-7}$       | 3.999    |

## Глава 5

# Численные методы для класса дробных уравнений адвекции-диффузии с функциональным запаздыванием

### Введение

В этой главе мы рассматриваем численные методы решения уравнений адвекции-диффузии с дробными производными как по времени, так и по пространству с эффектом наследственности. Условие отличия от нуля коэффициента при первой производной по времени делает возможным конструировать сходящиеся к точному решению приближенные алгоритмы, причем не только в случае сосредоточенного запаздывания, но и в случае запаздывания общего функционального вида. В этой главе результаты существенно опираются на конструкции работы [111], в которой строится неявный численный метод для уравнения адвекции-диффузии с дробной производной по времени и двухсторонней дробной производной по пространству. Кроме того, применяются конструкции интерполяции и экстраполяции дискретной предыстории модели, подобные тем, что были изложены в главе 2 и восходящие к общей разностной схеме систем с наследственностью. Однако, в отличие от главы 2, доказательство сходимости, непосредственно опирающееся на теорему сходимости в общей разностной схеме систем с наследственностью в данном случае неприменимо, в силу увеличивающейся памяти, обусловленной дробной производной по времени.

Рассмотрим класс дробных уравнений адвекции-диффузии [111] с функциональным запаздыванием

$$\begin{aligned} \beta_1 \frac{\partial u}{\partial t} + \beta_2 \frac{\partial^\gamma u}{\partial t^\gamma} = -V \frac{\partial u}{\partial x} + D \left( \frac{1}{2} + \frac{q}{2} \right) \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} + D \left( \frac{1}{2} - \frac{q}{2} \right) \frac{\partial^\alpha u}{\partial (-x)^\alpha} + \\ + f(x, t, u(x, t), u_t(x, \cdot)), \end{aligned} \quad (5.1)$$

где  $x \in [a, b]$ ,  $t \in [t_0, T]$ ,  $u_t(x, \cdot) = \{u(x, t + s), -\tau \leq s < 0\}$  — предыстория функции,  $\tau > 0$  — величина запаздывания,

с начальными условиями  $u(x, t) = \varphi(x, t)$ ,  $x \in [a, b]$ ,  $t \in [t_0 - \tau, t_0]$ ,

и граничными условиями  $u(a, t) = \varphi_1(t)$ ,  $u(b, t) = \varphi_2(t)$ ,  $t \in [t_0, T]$ .

Предположим, что  $\beta_1 \geq 0$ ,  $\beta_2 \geq 0$ ,  $|\beta_1| + |\beta_2| \neq 0$ ,  $-1 \leq q \leq 1$ ,  $V > 0$ ,  $D > 0$ ,  $1 < \alpha \leq 2$ ,  $0 < \gamma \leq 2$ .

Дробная производная по времени  $\frac{\partial^\gamma u}{\partial t^\gamma}$  определяется в смысле Капуто

$$\frac{\partial^\gamma u}{\partial t^\gamma} = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(m-\gamma)} \int_{t_0}^t \frac{\partial^m u(x, \xi) d\xi}{(t-\xi)^{\gamma-m+1}}, & m-1 < \gamma < m, \quad m \in \mathbb{N}, \\ \frac{\partial^m u(x, t)}{\partial t^m}, & \gamma = m \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Левосторонняя и правосторонняя дробные производные определяются в смысле Римана-Лиувилля

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{\partial^n}{\partial x^n} \int_a^x \frac{u(\eta, t) d\eta}{(x-\eta)^{\alpha-n+1}}, \quad n = [\alpha] + 1,$$

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial (-x)^\alpha} = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{\partial^n}{\partial x^n} \int_x^b \frac{u(\eta, t) d\eta}{(x-\eta)^{\alpha-n+1}}, \quad n = [\alpha] + 1.$$

Обозначим через  $Q = Q[-\tau, 0]$  множество функций  $u(s)$ , кусочно-непрерывных на  $[-\tau, 0]$  с конечным числом точек разрыва первого рода, в точках разрыва непрерывных справа, с нормой  $\|u(\cdot)\|_Q = \sup_{s \in [-\tau, 0]} |u(s)|$ . Предположим, что функционал  $f(x, t, u, v(\cdot))$  определен на  $[a, b] \times [t_0, T] \times R \times Q$ .

Будем предполагать, что функционал  $f$ , функции  $\varphi(x, t)$ ,  $\varphi_1(t)$ ,  $\varphi_2(t)$ , и коэффициенты  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ ,  $q$ ,  $V$ ,  $D$  таковы, что задача (5.1) имеет единственное решение  $u(x, t)$ . Дополнительно предположим, что функционал  $f(x, t, u, v(\cdot))$  липшицев по двум последним аргументам, т.е. существуют константы  $L$  и  $K$  такие, что для всех  $x \in [a, b]$ ,  $t \in [t_0, T]$ ,  $u^1 \in R$ ,  $u^2 \in R$ ,  $v^1(\cdot) \in Q$  и  $v^2(\cdot) \in Q$  выполняется следующее неравенство:

$$|f(x, t, u^1, v^1(\cdot)) - f(x, t, u^2, v^2(\cdot))| \leq L|u^1 - u^2| + K \|v^1(\cdot) - v^2(\cdot)\|_Q. \quad (5.2)$$

Мы рассмотрим случай, когда  $\beta_1 = 1$ ,  $\beta_2 = \beta$ ,  $0 < \gamma \leq 1$ .

## 5.1 Вывод разностной схемы

Проведем дискретизацию задачи. Пусть шаги по пространству и времени определяются соотношениями  $h = (b - a)/N$ ,  $\Delta = (T - t_0)/M$ , где  $N$ ,  $M$  — целые положительные числа (без ограничения общности предположим, что  $\tau/\Delta = m$  целое). Введем точки разбиения

$x_i = a + ih$ ,  $i = 0, \dots, N$ , и  $t_j = t_0 + j\Delta$ ,  $j = 0, \dots, M$ . Будем обозначать через  $u_j^i$  приближения функции  $u(x_i, t_j)$  в узлах.

Для каждого фиксированного  $i = 0, \dots, N$  введем дискретную предысторию к моменту времени  $t_j$ ,  $j = 0, \dots, M$ :  $\{u_k^i\}_j = \{u_k^i, j - m \leq k \leq j\}$ . Отображение  $I : \{u_k^i\}_j \rightarrow v^i(t)$ ,  $t \in [t_j - \tau, t_j + \Delta]$  назовем оператором интерполяции-экстраполяции дискретной предыстории. Так как мы будем конструировать неявный метод первого порядка по времени, мы будем использовать кусочно-постоянную интерполяцию с экстраполяцией продолжением

$$v^i(t) = \begin{cases} u_{l-1}^i, & t_{l-1} \leq t < t_l, \quad 1 \leq l \leq j, \\ u_{j-1}^i, & t_j \leq t \leq t_j + \Delta, \\ \varphi(x_i, t), & t_0 - \tau \leq t \leq t_0. \end{cases}$$

Кусочно-постоянная интерполяция с экстраполяцией продолжением обладает свойством

**Лемма 30** ([5, Лемма 3.1]). *Если решение  $u(x_i, t)$  задачи (5.1) непрерывно дифференцируемая по  $t$  функция, то существует такая константа  $C_1$ , что выполняется неравенство*

$$\max_{t_j - \tau \leq t \leq t_j + \Delta} |v^i(t) - u(x_i, t)| \leq \max_{j-m \leq k \leq j} |u_k^i - u(x_i, t_k)| + C_1 \Delta.$$

Это свойство называется первым порядком погрешности оператора интерполяции-экстраполяции [5, Определение 3.7].

Дискретизируем пространственные дробные производные Римана-Лиувилля с помощью сдвинутых формул Грюнвальда-Летникова [124]

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} u(x_i, t_{k+1}) = \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{i+1} \omega_j^\alpha u(x_{i+1-j}, t_{k+1}) + O(h^p), \quad (5.3)$$

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial (-x)^\alpha} u(x_i, t_{k+1}) = \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{N-i+1} \omega_j^\alpha u(x_{i-1+j}, t_{k+1}) + O(h^p). \quad (5.4)$$

Коэффициенты  $\omega_j^\alpha$  определяются неоднозначно, положим

$$\omega_j^\alpha = (-1)^j \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-j+1)}{j!}, \quad j = 0, 1, \dots,$$

тогда аппроксимации будут иметь порядок  $p = 1$ .

Дискретизируем дробную производную Капуто по времени используя  $L1$ -алгоритм [111]

$$\frac{\partial^\gamma}{\partial t^\gamma} u(x, t_{k+1}) = \frac{1}{\Delta^\gamma \Gamma(2-\gamma)} \sum_{j=0}^k b_j^\gamma [u(x, t_{k+1-j}) - u(x, t_{k-j})] + O(\Delta^{2-\gamma}), \quad (5.5)$$

где  $b_j^\gamma = (j+1)^{1-\gamma} - j^{1-\gamma}$ ,  $j = 0, 1, \dots, M$ .

Также мы будем использовать формулы численного дифференцирования

$$\frac{\partial}{\partial x} u(x_i, t_{k+1}) = \frac{u(x_i, t_{k+1}) - u(x_{i-1}, t_{k+1})}{h} + O(h), \quad (5.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x_i, t_{k+1}) = \frac{u(x_i, t_{k+1}) - u(x_i, t_k)}{\Delta} + O(\Delta). \quad (5.7)$$

В результате мы получаем следующую неявную разностную схему

$$\begin{aligned} \frac{u_{k+1}^i - u_k^i}{\Delta} + \frac{\beta}{\Delta^\gamma \Gamma(2-\gamma)} \sum_{j=0}^k b_j^\gamma [u_{k+1-j}^i - u_{k-j}^i] = -V \frac{u_{k+1}^i - u_{k+1}^{i-1}}{h} + \\ \left(\frac{1}{2} + \frac{q}{2}\right) \frac{D}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{i+1} \omega_j^\alpha u_{k+1}^{i+1-j} + \left(\frac{1}{2} - \frac{q}{2}\right) \frac{D}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{N-i+1} \omega_j^\alpha u_{k+1}^{i-1+j} + f_{j+1}^i, \end{aligned} \quad (5.8)$$

$$f_{j+1}^i = f(x_i, t_{j+1}, v^i(t_j + \Delta), v_{t_j+\Delta}^i(\cdot)).$$

Схема дополняется начальными условиями  $u_0^i = \varphi(t_i)$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$ , и граничными условиями  $u_k^0 = \varphi_1(t_k)$ ,  $u_k^M = \varphi_2(t_k)$ ,  $k = 1, 2, \dots, M$ .

Схема может быть переписана в следующем виде

$$\begin{aligned} \mu u_{k+1}^i - r_2 u_{k+1}^{i-1} - \frac{1+q}{2} r_3 \sum_{j=0, j \neq 1}^{i+1} \omega_j^\alpha u_{k+1}^{i+1-j} - \frac{1-q}{2} r_3 \sum_{j=0, j \neq 1}^{N-i+1} \omega_j^\alpha u_{k+1}^{i-1+j} = \\ u_{k+1}^i + \beta r_1 [b_k^\gamma u_0^i + \sum_{j=0}^{k-1} (b_j^\gamma - b_{j+1}^\gamma) u_{k-j}^i] + \Delta f_{j+1}^i. \end{aligned} \quad (5.9)$$

где  $r_1 = \Delta^{1-\gamma}/\Gamma(2-\gamma)$ ,  $r_2 = V\Delta/h$ ,  $r_3 = D\Delta/h^\alpha$ ,  $\mu = 1 + \beta r_1 + r_2 + \alpha r_3$ .

**Лемма 31** ([111, Замечание 2]). *Коэффициенты матрицы системы (5.9) имеют строгое диагональное преобладание с положительными диагональными элементами, следовательно, система разрешима и имеет единственное решение.*

Таким образом, применение дискретной схемы сводится на каждом временном слое с номером  $k$  к решению линейной системы относительно неизвестных  $u_{k+1}^i$  и эта система разрешима согласно результату леммы 31.

## 5.2 Погрешность аппроксимации

Исследуем погрешность аппроксимации (невязку) метода (5.8).

Невязкой (без интерполяции) метода (5.8) назовем, по определению, сеточную функцию

$$\begin{aligned} \psi_k^i = \frac{u(x_i, t_{k+1}) - u(x_i, t_k)}{\Delta} + \frac{\beta}{\Delta^\gamma \Gamma(2-\gamma)} \sum_{j=0}^k b_j^\gamma [u(x_i, t_{k+1-j}) - u(x_i, t_{k-j})] \\ + V \frac{u(x_i, t_{k+1}) - u(x_{i-1}, t_{k+1})}{h} - \left(\frac{1}{2} + \frac{q}{2}\right) \frac{D}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{i+1} \omega_j^\alpha u(x_{i+1-j}, t_{k+1}) \\ - \left(\frac{1}{2} - \frac{q}{2}\right) \frac{D}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{N-i+1} \omega_j^\alpha u(x_{i-1+j}, t_{k+1}) - \hat{f}_{k+1}^i, \quad \hat{f}_{k+1}^i = f(x_i, t_{k+1}, u(x_i, t_{k+1}), u_{t_{k+1}}(x_i, \cdot)). \end{aligned}$$

**Лемма 32.** Пусть точное решение  $u(x, t)$  дважды непрерывно дифференцируемо по  $t$  и по  $x$ , а также дробные производные  $\frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha}$  и  $\frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial (-x)^\alpha}$  непрерывно дифференцируемы по  $t$  и по  $x$ . Тогда невязка без интерполяции имеет порядок  $\Delta + h$ .

*Доказательство.* Разложим входящие в определение невязки без интерполяции величины в окрестности точки  $(x_i, t_{k+1})$  и воспользуемся разложениями (5.3) — (5.7).  $\square$

Для каждого фиксированного  $i = 0, \dots, N$  введем дискретную предысторию точного решения к моменту времени  $t_j$ ,  $j = 0, \dots, M$ :  $\{u(x_i, t_k)\}_j = \{u(x_i, t_k), j - m \leq k \leq j\}$ . Будем использовать кусочно-постоянную интерполяцию с экстраполяцией продолжением точного решения

$$w^i(t) = \begin{cases} u(x_i, t_{l-1}), & t_{l-1} \leq t \leq t_l, \quad 1 \leq l \leq j, \\ u(x_i, t_{j-1}), & t_j \leq t \leq t_j + \Delta, \\ \varphi(x_i, t), & t_0 - \tau \leq t \leq t_0. \end{cases}$$

Невязкой (с интерполяцией) метода (5.8) назовем, по определению, сеточную функцию

$$\begin{aligned} \nu_k^i &= \frac{u(x_i, t_{k+1}) - u(x_i, t_k)}{\Delta} + \frac{\beta}{\Delta^\gamma \Gamma(2 - \gamma)} \sum_{j=0}^k b_j^\gamma [u(x_i, t_{k+1-j}) - u(x_i, t_{k-j})] \\ &\quad + V \frac{u(x_i, t_{k+1}) - u(x_{i-1}, t_{k+1})}{h} - \left(\frac{1}{2} + \frac{q}{2}\right) \frac{D}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{i+1} \omega_j^\alpha u(x_{i+1-j}, t_{k+1}) \\ &\quad - \left(\frac{1}{2} - \frac{q}{2}\right) \frac{D}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{N-i+1} \omega_j^\alpha u(x_{i-1+j}, t_{k+1}) - \tilde{f}_{k+1}^i, \quad \tilde{f}_{k+1}^i = f(x_i, t_{k+1}, w^i(t_k + \Delta), w_{t_k + \Delta}^i(\cdot)). \end{aligned}$$

**Лемма 33.** В условиях предыдущей леммы невязка с интерполяцией имеет порядок  $\Delta + h$ .

*Доказательство.* Из определений невязки с интерполяцией и невязки без интерполяции имеем

$$\nu_k^i = \psi_k^i + f(x_i, t_{k+1}, u(x_i, t_{k+1}), u_{t_{k+1}}(x_i, \cdot)) - f(x_i, t_{k+1}, w^i(t_k + \Delta), w_{t_k + \Delta}^i(\cdot)).$$

Из того, что кусочно-постоянная интерполяция с экстраполяцией продолжением имеет первый порядок (Лемма 30), получаем

$$|w^i(t) - u(x_i, t)| \leq C_1 \Delta, \quad t_j - \tau \leq t \leq t_j + \Delta.$$

Из этих соотношений, с учетом условия (5.11) вытекает утверждение леммы.  $\square$

### 5.3 Сходимость метода

Обозначим через  $\varepsilon_j^i = u(x_i, t_j) - u_j^i$  погрешность метода в узлах. Будем говорить, метод сходится с порядком  $h^p + \Delta^q$ , если существует постоянная  $C$ , независящая от  $h$  и  $\Delta$ , такая, что  $|\varepsilon_j^i| \leq C(h^p + \Delta^q)$  для всех  $i = 0, 1, \dots, N$  и  $j = 0, 1, \dots, M$ .

Определим для каждого временного слоя с номером  $j = 0, 1, \dots, M$  послойную погрешность — вектор  $\varepsilon_j = (\varepsilon_j^1, \varepsilon_j^2, \dots, \varepsilon_j^{N-1})$  с нормой  $\|\varepsilon_j\| = \max_{1 \leq i \leq N-1} |\varepsilon_j^i|$ .

Кроме того, определим накопившуюся предысторию послойной погрешности к моменту  $t_j$ ,  $j = 0, 1, \dots, M$ :

$\{\varepsilon_k\}_j = \{\varepsilon_k, 0 \leq k \leq j\}$  с нормой  $\|\{\varepsilon_k\}_j\| = \max_{0 \leq k \leq j} \|\varepsilon_k\|$ .

**Лемма 34.** Пусть  $|\varepsilon_{k+1}^{i_0}| = \max_{1 \leq i \leq N-1} |\varepsilon_{k+1}^i|$ , тогда

$$(1 + \beta r_1) \|\varepsilon_{k+1}\| \leq |\varepsilon_k^{i_0} + \beta r_1 [b_k^\gamma \varepsilon_0^{i_0} + \sum_{j=0}^{k-i} (b_j^\gamma - b_{j+1}^\gamma) \varepsilon_{k-j}^{i_0}] + \Delta \check{f}_{k+1}^{i_0} - \Delta f_{k+1}^{i_0} + \Delta \nu_k^{i_0}|.$$

*Доказательство.* Перепишем определение невязки с интерполяцией в виде

$$\begin{aligned} \mu u(x_i, t_{k+1}) - r_2 u(x_{i-1}, t_{k+1}) - \frac{1+q}{2} r_3 \sum_{j=0, j \neq 1}^{i+1} \omega_j^\alpha u(x_{i+1-j}, t_{k+1}) - \frac{1-q}{2} r_3 \sum_{j=0, j \neq 1}^{N-i+1} \omega_j^\alpha u(x_{i-1+j}, t_{k+1}) \\ = u(x_i, t_{k+1}) + \beta r_1 [b_k^\gamma u(x_i, t_0) + \sum_{j=0}^{k-1} (b_j^\gamma - b_{j+1}^\gamma) u(x_i, t_{k-j})] + \Delta \check{f}_{j+1}^i + \Delta \nu_k^i. \end{aligned}$$

Отсюда и из определения метода (5.9), получаем уравнение для погрешности

$$\begin{aligned} \mu \varepsilon_{k+1}^i - r_2 \varepsilon_{k+1}^{i-1} - \frac{1+q}{2} r_3 \sum_{j=0, j \neq 1}^{i+1} \omega_j^\alpha \varepsilon_{k+1}^{i+1-j} - \frac{1-q}{2} r_3 \sum_{j=0, j \neq 1}^{N-i+1} \omega_j^\alpha \varepsilon_{k+1}^{i-1+j} \\ = \varepsilon_{k+1}^i + \beta r_1 [b_k^\gamma \varepsilon_0^i + \sum_{j=0}^{k-1} (b_j^\gamma - b_{j+1}^\gamma) \varepsilon_{k-j}^i] + \Delta \check{f}_{j+1}^i + \Delta \nu_k^i - \Delta f_{j+1}^i. \end{aligned}$$

Так как  $1 + \beta r_1 = \mu - r_2 - \alpha r_3$ , то используя свойства коэффициентов  $\omega_1^\alpha = -\alpha$ ,  $\omega_j^\alpha > 0$ ,  $j = 2, 3, \dots$ ,  $\sum_{j=0}^{i_0+1} \omega_j^\alpha < 0$ ,  $\sum_{j=0}^{N-i_0+1} \omega_j^\alpha < 0$  [111, Лемма 1], получаем

$$\begin{aligned} (1 + \beta r_1) \|\varepsilon_{k+1}\| &\leq (\mu - r_2 - \frac{1+q}{2} r_3 \sum_{j=0, j \neq 1}^{i_0+1} \omega_j^\alpha - \frac{1-q}{2} r_3 \sum_{j=0, j \neq 1}^{N-i_0+1} \omega_j^\alpha) |\varepsilon_{k+1}^{i_0}| \\ &\leq \mu |\varepsilon_{k+1}^{i_0}| - r_2 |\varepsilon_{k+1}^{i_0-1}| - \frac{1+q}{2} r_3 \sum_{j=0, j \neq 1}^{i_0+1} \omega_j^\alpha |\varepsilon_{k+1}^{i_0+1-j}| - \frac{1-q}{2} r_3 \sum_{j=0, j \neq 1}^{N-i_0+1} \omega_j^\alpha |\varepsilon_{k+1}^{i_0-1+j}| \\ &\leq |\mu \varepsilon_{k+1}^{i_0} - r_2 \varepsilon_{k+1}^{i_0-1} - \frac{1+q}{2} r_3 \sum_{j=0, j \neq 1}^{i_0+1} \omega_j^\alpha \varepsilon_{k+1}^{i_0+1-j} - \frac{1-q}{2} r_3 \sum_{j=0, j \neq 1}^{N-i_0+1} \omega_j^\alpha \varepsilon_{k+1}^{i_0-1+j}| \\ &= |\varepsilon_k^{i_0} + \beta r_1 [b_k^\gamma \varepsilon_0^{i_0} + \sum_{j=0}^{k-i} (b_j^\gamma - b_{j+1}^\gamma) \varepsilon_{k-j}^{i_0}] + \Delta \check{f}_{k+1}^{i_0} - \Delta f_{k+1}^{i_0} + \Delta \nu_k^{i_0}|. \end{aligned}$$

□

Доказанное утверждение означает устойчивость разностной схемы.

В следующем утверждении проводится оценка накопившейся предыстории послойной погрешности к моменту  $t_{k+1}$  через накопившуюся предысторию послойной погрешности к моменту  $t_k$ .



**Лемма 35.** *Предположим, что условия Леммы 32 выполнены, тогда справедлива оценка*

$$\|\{\varepsilon_j\}_{k+1}\| \leq (1 + (L + K)\Delta)\|\{\varepsilon_j\}_k\| + C_2\Delta(h + \Delta).$$

*Доказательство.* Пусть  $|\varepsilon_{k+1}^{i_0}| = \max_{1 \leq i \leq N-1} |\varepsilon_{k+1}^i|$ , тогда из Леммы 34 получаем

$$\begin{aligned} (1 + \beta r_1)\|\varepsilon_{k+1}\| &\leq |\varepsilon_k^{i_0} + \beta r_1[b_k^\gamma \varepsilon_0^{i_0} + \sum_{j=0}^{k-i} (b_j^\gamma - b_{j+1}^\gamma)\varepsilon_{k-j}^{i_0}] + \Delta \check{f}_{k+1}^{i_0} - \Delta f_{k+1}^{i_0} + \Delta \nu_k^{i_0}| \\ &\leq [1 + \beta r_1(b_k^+ \sum_{j=0}^{k-i} (b_j^\gamma - b_{j+1}^\gamma))]\|\{\varepsilon_j\}_k\| + \Delta|\check{f}_{k+1}^{i_0} - f_{k+1}^{i_0}| + \Delta|\nu_k^{i_0}| \\ &\leq (1 + \beta r_1)\|\{\varepsilon_j\}_k\| + \Delta|\check{f}_{k+1}^{i_0} - f_{k+1}^{i_0}| + \Delta|\nu_k^{i_0}|. \end{aligned}$$

Разделим обе части этого неравенства на  $(1 + \beta r_1)$ , получим

$$\|\varepsilon_{k+1}\| \leq \|\{\varepsilon_j\}_k\| + \frac{\Delta}{1 + \beta r_1}(|\check{f}_{k+1}^{i_0} - f_{k+1}^{i_0}| + |\nu_k^{i_0}|) \leq \|\{\varepsilon_j\}_k\| + \Delta(|\check{f}_{k+1}^{i_0} - f_{k+1}^{i_0}| + |\nu_k^{i_0}|). \quad (5.10)$$

Из липшицевости функции  $f$  по двум последним аргументам (из неравенства (5.8)) и свойств кусочно-постоянной интерполяции с экстраполяцией продолжением следует неравенство

$$|\check{f}_{k+1}^{i_0} - f_{k+1}^{i_0}| \leq (L + K)\|\{\varepsilon_j\}_k\|. \quad (5.11)$$

Из (5.10), (5.11) и Леммы 33 следует утверждение доказываемой леммы. □

**Теорема 17.** *Пусть точное решение  $u(x, t)$  уравнения (5.1) является достаточно гладким (выполнено предположение Леммы 32), тогда метод (5.9) сходится с порядком  $h + \Delta$ .*

*Доказательство.* Из Леммы 35 имеем

$$\|\{\varepsilon_j\}_{k+1}\| \leq A\|\{\varepsilon_j\}_k\| + B,$$

где  $A = 1 + (L + K)\Delta$ ,  $B = C_2\Delta(h + \Delta)$ . Последовательно получаем  $\|\{\varepsilon_j\}_0\| = 0$ ,  $\|\{\varepsilon_j\}_1\| \leq B$ ,  $\|\{\varepsilon_j\}_2\| \leq AB + B, \dots, \|\{\varepsilon_j\}_n\| \leq (A^{n-1} + \dots + A + 1)B$ . Используя формулу геометрической прогрессии, получаем для всех временных слоев с номером  $n \leq M$

$$\|\{\varepsilon_j\}_n\| \leq \frac{A^n - 1}{A - 1}B \leq \frac{A^M - 1}{A - 1}B.$$

Подставим в эту оценку выражения для  $A$  и  $B$ , воспользуемся также связью  $\Delta M = T - t_0$ :

$$\|\{\varepsilon_j\}_n\| \leq \frac{(1 + (L + K)\Delta)^{\frac{T-t_0}{\Delta}} - 1}{(L + K)\Delta} C_2\Delta(h + \Delta).$$

Отсюда получаем оценку

$$\|\{\varepsilon_j\}_n\| \leq \frac{C_2}{L + K} e^{(L+K)(T-t_0)}(h + \Delta),$$

равномерную по всем  $n = 1, 2, \dots, M$ . Эта оценка означает сходимость метода с порядком  $h + \Delta$ . □

Табл. 5.1: Зависимость погрешности от пространственного шага и порядок погрешности.

| h     | $\gamma = 0.15, \alpha = 1.1$ |           | $\gamma = 0.85, \alpha = 1.9$ |           |
|-------|-------------------------------|-----------|-------------------------------|-----------|
|       | $E(\Delta, h)$                | $order_s$ | $E(\Delta, h)$                | $order_s$ |
| 1/20  | 0.00568                       |           | 0.00437                       |           |
| 1/40  | 0.00293                       | 0.9567    | 0.00222                       | 0.9765    |
| 1/80  | 0.00149                       | 0.9687    | 0.00112                       | 0.9884    |
| 1/160 | 0.00075                       | 0.9854    | 0.00056                       | 0.9996    |
| 1/320 | 0.00037                       | 0.9975    | 0.00028                       | 1.0004    |

## 5.4 Результаты численного эксперимента

Рассмотрим следующее уравнение с переменным запаздыванием

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial^\gamma u(x, t)}{\partial t^\gamma} = \frac{1}{2} \frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial x^\alpha} + \frac{1}{2} \frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial (-x)^\alpha} + f, \quad (5.12)$$

$$f = \frac{1}{\ln((t^2/4)(x - 1/2)^3(3/2 - x)^3)} \left( 2(t + \frac{t^{2-\gamma}}{\Gamma(3-\gamma)})(x - 1/2)^3(3/2 - x)^3 - \frac{1}{2} \frac{\Gamma(4)}{\Gamma(4-\alpha)} ((x - 1/2)^{3-\alpha} + (3/2 - x)^{3-\alpha}) + \frac{1}{2} \frac{3\Gamma(5)}{\Gamma(5-\alpha)} ((x - 1/2)^{4-\alpha} + (3/2 - x)^{4-\alpha}) - \frac{1}{2} \frac{3\Gamma(6)}{\Gamma(6-\alpha)} ((x - 1/2)^{5-\alpha} + (3/2 - x)^{5-\alpha}) + \frac{1}{2} \frac{\Gamma(7)}{\Gamma(7-\alpha)} ((x - 1/2)^{6-\alpha} + (3/2 - x)^{6-\alpha}) \right) \ln(u(x, t - t/2)),$$

заданное при  $1/2 \leq x \leq 3/2, \quad 1 \leq t \leq 5,$

с начальными и граничными условиями вида

$$u(x, r) = r^2(x - 1/2)^3(3/2 - x)^3, \quad 1/2 \leq r \leq 1, \quad 1/2 \leq x \leq 3/2,$$

$$u(1/2, t) = 0, \quad u(3/2, t) = 0, \quad 1 \leq t \leq 5.$$

Точным решением уравнения (5.12) является функция  $u(x, t) = t^2(x - 1/2)^3(3/2 - x)^3$ .

Обозначим максимальную погрешность в узлах через

$$E(\Delta, h) = \max_{0 \leq j \leq M, 0 \leq i \leq N} |u(x_i, t_j) - u_j^i|.$$

Проведен численный эксперимент, в котором тестировался метод (5.9) при изменении пространственного шага  $h$  с величины  $\frac{1}{20}$  до величины  $\frac{1}{320}$ , при фиксированном временном шаге  $\Delta = \frac{4}{1024}$ . Порядок сходимости относительно пространственного шага характеризуется в эксперименте величиной  $order_s = \log_2 \left( \frac{E(\Delta, 2h)}{E(\Delta, h)} \right)$ , изменения которой отражены в таблице 5.1. В эксперименте также брались разные порядки  $\alpha$  и  $\gamma$  дробных производных.

Для исследования зависимости максимальной погрешности от времени, временной шаг  $\Delta$  менялся от  $\frac{1}{16}$  до  $\frac{1}{256}$  при фиксированном пространственном шаге  $h = \frac{1}{4000}$ . Порядок сходимости относительно временного шага характеризуется в эксперименте величиной  $order_t =$

Табл. 5.2: Зависимость погрешности от временного шага и порядок погрешности.

| $\Delta$ | $\gamma = 0.15, \alpha = 1.1$ |           | $\gamma = 0.85, \alpha = 1.9$ |           |
|----------|-------------------------------|-----------|-------------------------------|-----------|
|          | $E(\Delta, h)$                | $order_t$ | $E(\Delta, h)$                | $order_t$ |
| 1/16     | 0.00074                       |           | 0.000032                      |           |
| 1/32     | 0.00038                       | 0.9432    | $1.625 \times 10^{-5}$        | 0.97743   |
| 1/64     | 0.00019                       | 0.9632    | $8.19 \times 10^{-6}$         | 0.9886    |
| 1/128    | 0.00009                       | 0.9778    | $4.098 \times 10^{-6}$        | 0.9988    |
| 1/256    | 0.00004                       | 0.9965    | $2.05 \times 10^{-6}$         | 0.9999    |

$\log_2 \left( \frac{E(2\Delta, h)}{E(\Delta, h)} \right)$  изменения проиллюстрированы в табл. 5.2. Из этих таблиц можно заметить, что результаты численных экспериментов хорошо согласуются с теоретическими результатами.

## 5.5 Заключение

Для уравнения адвекции-диффузии с дробными производными по времени и по пространству и с эффектом функционального запаздывания в случае коэффициента при первой производной по времени, отличной от нуля, построены и исследованы разностные схемы. Алгоритмы аппроксимации дробных производных основаны на использовании сдвинутых формул Грюнвальда-Летникова для аппроксимации дробных производных по пространству и L1-алгоритм для аппроксимации дробных производных по времени. Для учета функционального запаздывания используется идея отделения текущего состояния и функции-предыстории. Для учета функции-предыстории используется кусочно-постоянная интерполяция с экстраполяцией продолжением предыстории модели по времени. Алгоритм является аналогом чисто неявного численного метода и сводится на каждом временном шаге к решению линейных алгебраических систем, доказана его разрешимость, исследована его устойчивость и порядок сходимости. Методы основаны на идее отделения текущего состояния и функции-предыстории. Численные эксперименты показывают хорошую согласованность с теоретическими результатами.

# Заключение

Диссертация посвящена разработке и исследованию сеточных методов решения дробных дифференциальных уравнений с нелинейными эффектами запаздывания. Такого рода эффекты могут возникать, в частности, при моделировании задач управления по принципу обратной связи при наличии задержек в канале обратной связи. Получены следующие основные результаты:

1. Для дробного дифференциального уравнения с сосредоточенным запаздыванием приведены конструкции неявного метода, основанного на аппроксимации точного решения на соответствующем отрезке сдвинутыми полиномами Чебышева, выведены оценки для локальной и глобальной погрешности численного решения. Показано, что в случае переменного запаздывания, порядок сходимости метода зависит по-разному в двух введенных случаях от величины запаздывания.
2. Для одностороннего и двухстороннего дробного по пространству уравнения диффузии с функциональным запаздыванием сконструированы дробные аналоги метода Кранка-Никольсона с кусочно-линейной интерполяцией дискретной предыстории и её экстраполяцией продолжением, доказаны теоремы о порядках сходимости методов.
3. Построена линеаризованная разностная схема для решения класса уравнений диффузии с дробной производной по времени и с нелинейным запаздыванием, проведен анализ устойчивости и сходимости схем, конструкции разностных схем перенесены на случай дробной производной по времени распределенного порядка от нуля до единицы.
4. Сконструирована линеаризованная разностная схема для решения класса диффузионно-волнового уравнения распределенного дробного порядка с запаздыванием, проведен анализ однозначной разрешимости, устойчивости и сходимости схем в терминах дискретного энергетического метода.
5. Для уравнения адвекции-диффузии с дробными производными по времени и по пространству и с эффектом функционального запаздывания в случае коэффициента при первой производной по времени, отличной от нуля, построены разностные схемы, основан-

ные на использовании сдвинутых формул Грюнвальда-Летникова для аппроксимации дробных производных по пространству, L1-алгоритма для аппроксимации дробных производных по времени и кусочно-постоянной интерполяции с экстраполяцией продолжением для учета предыстории модели по времени, доказана разрешимость, устойчивость и исследован порядок сходимости.

Все полученные теоретические результаты подтверждаются тестовыми примерами, содержащими запаздывания различных видов.

Возможными приложениями данных результатов может послужить разработка программных комплексов для численного моделирования различных задач, описываемых уравнениями с дробными производными типа с эффектом наследственности по времени. В связи с этим, возможным направлением дальнейших исследований в части разработки алгоритмов может послужить рассмотрение задач с другими краевыми условиями, задач с переменными коэффициентами, задачи с функциональным запаздыванием по времени для уравнений с дробными производными также по времени и т.д.

Другим возможным направлением дальнейших исследований по тематике диссертации может стать разработка и исследование численных алгоритмов решения уравнений задач пространственной размерности два и выше. Такие системы активно изучаются, например, в задачах биологии и медицины (дробная модель Фитц-Хью-Нагумо с запаздыванием), а также в других реальных моделях.

# Литература

- [1] А.А. Алиханов. Устойчивость и сходимость разностных схем для краевых задач уравнения диффузии дробного порядка // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2016, т. 56, №. 4, с. 572–586.
- [2] А.К. Баззаев, М.Х. Шхануков-Лафишев. Локально-одномерные схемы для уравнения диффузии с дробной производной по времени в области произвольной формы // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2016, т. 56, №. 1, с. 113–123.
- [3] Л.С. Волканин. Численное решение уравнения переноса с эффектом наследственности // Теория управления и математическое моделирование. Ижевск : Изд. ИжГТУ, 2012. С. 12–13.
- [4] З. Камонт, К. Кропельница. Неявные разностные методы для эволюционных функционально-дифференциальных уравнений // Сиб. журн. вычис. математики. 2011, т. 14, №. 4, с. 361–379.
- [5] А.В. Ким, В.Г. Пименов.  $i$ -Гладкий анализ и численные методы решения функционально-дифференциальных уравнений. Москва-Ижевск, Регулярная и хаотическая динамика, 2004.
- [6] А.М. Нахушев. Уравнения математической биологии. Москва: Высшая школа, 1995.
- [7] Е.А. Омельченко, М.В. Плеханова, П.Н. Давыдов. Численное решение линеаризованной системы уравнений фазового поля с запаздыванием // Вестник ЮУрГУ. Сер. Математика. Механика. Физика. 2013. Т.5, № 2. С. 45–52.
- [8] В.Г. Пименов. Общие линейные методы численного решения функционально-дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37, № 1. С. 105–114.
- [9] В.Г. Пименов. Разностные методы решения уравнений в частных производных с наследственностью. Екатеринбург: изд-во Урал. ун-та, 2014.
- [10] В.Г. Пименов, А.В. Лекомцев. Сходимость метода переменных направлений численного решения уравнения теплопроводности с запаздыванием // Труды ИММ УрО РАН. 2010.

- Т. 16, №1, С. 102–118, перевод A.V. Lekomtsev, V.G. Pimenov, Convergence of the Alternating Direction Methods for the Numerical Solution of a Heat Conduction Equation with Delay, Proc. Steklov Inst. Math., 272. Suppl. 1, 101–118, 2011.
- [11] В.Г. Пименов, А.Б. Ложников. Разностные схемы численного решения уравнения теплопроводности с последействием // Труды ИММ УрО РАН. 2011. Т. 17, № 1, С. 178–189, перевод V.G. Pimenov and A. B. Lozhnikov, Difference Schemes for the Numerical Solution of the Heat Conduction Equation with Aftereffect, Proc. Steklov Inst. Math., vol. 275, no. S1, pp. 137-148, 2011.
- [12] В.Г. Пименов, С.В. Свиридов. Сеточные методы решения уравнения переноса с запаздыванием // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2014. Вып. 3. С. 59–74.
- [13] В.Г. Пименов, Е.Е. Таширова. Численные методы решения уравнения гиперболического типа с наследственностью // Труды ИММ УрО РАН, 2012, Т. 18, № 2, С. 222–231. перевод V.G. Pimenov, E.E. Tashirova, Numerical methods for solving a hereditary equation of hyperbolic type. Proc. Steklov Inst. Math., vol. 281. Suppl. 1, pp. 126–136, 2013.
- [14] А.В. Псху. Уравнения в частных производных дробного порядка. Москва: Наука, 2005.
- [15] С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев. Интегралы и производные дробного порядка и их приложения. Минск: Наука и техника, 1987, перевод S.G. Samko, A.A. Kilbas, O.I. Marichev, Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications, Boca Raton, CRC Press, 1993.
- [16] А.А. Самарский. Теория разностных схем. 3-е изд. М.: Наука, 1989. перевод А.А. Samarskii, The Theory of Difference Schemes, New York: Marcel Dekker, 2001.
- [17] А.А. Самарский, В.Б. Андреев. Конечно-разностные методы для эллиптических уравнений. Москва: Наука, 1976.
- [18] С.И. Солодушкин. Разностная схема для численного решения уравнения переноса с последействием // Известия высших учебных заведений. Математика. 2013. №. 10. С. 77–82.
- [19] В.Е. Тарасов. Модели теоретической физики с интегро-дифференцированием дробного порядка. Москва, Ижевск: РХД, 2010.
- [20] Ф.И. Тауркенова, М.Х. Шхануков-Лафишев. Разностные методы решения краевых задач для дифференциальных уравнений дробного порядка // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2006, т. 46, № 10, с. 1871–1881.

- [21] В.В. Учайкин. Дробно-дифференциальная модель динамической памяти // РФФИ. Математика и механика. 2007. С. 1–13
- [22] М.Х. Шхануков. О сходимости разностных схем для дифференциальных уравнений с дробной производной // Доклады АН, 1996, т. 348, № 6, с. 746–748.
- [23] В.Е. Федоров, В.М. Гордиевских, М.В. Плеханова. Уравнения в банаховых пространствах с обобщенным оператором дробной производной // Дифференц. уравнения, 2015, т. 51, № 10, с. 1360–1368, перевод V.E. Fedorov, D. M. Gordievskikh and M. V. Plekhanova. Equations in Banach spaces with a degenerate operator under a fractional derivative // Differential equations. 2015, vol. 51, no. 10, pp. 1360–1368.
- [24] S. Abbas, D. Baleanu, and M. Benchohra, Global attractivity for fractional order delay partial integro-differential equations, Adv. Differ. Equations, vol. 2012, no. 1, p. 597-604, 2012.
- [25] R.P. Agarwal, Y. Zhou, and Y. He, Existence of fractional neutral functional differential equations, Comput. Math. with Appl., vol. 59, no. 3, pp. 1095-1100, 2010.
- [26] A.A. Alikhanov. Boundary value problems for the diffusion equation of the variable order in differential and difference settings. Applied Mathematics and Computation, vol. 219, 3938–3946, 2012.
- [27] A.A. Alikhanov, A new difference scheme for the time fractional diffusion equation, J. Comput. Phys., vol. 280, pp. 424–438, 2015.
- [28] A.A. Alikhanov, Numerical methods of solutions of boundary value problems for the multi-term variable-distributed order diffusion equation. Appl. Math. Comput., vol. 268, pp. 12-22, 2015.
- [29] A. Ashyraliev, P. E. Sobolevskii. Well-Posedness of Parabolic Difference Equations, Operator Theory Advances and Applications, vol. 69, Birkhäuser, 1994.
- [30] T.M. Atanackovic, A generalized model for the uniaxial isothermal deformation of a viscoelastic body. Acta Mech., vol. 159, pp. 77–86, 2002.
- [31] T.M. Atanackovic, L. Opranica, S. Pilipovic, On a nonlinear distributed order fractional differential equation. J. Math. Anal. Appl., vol. 328, pp. 590–608, 2007.
- [32] T.M. Atanackovic, M. Budincevic, S. Pilipovic, On a fractional distributed-order oscillator. J. Phys. A, Math. Gen., vol. 38, pp. 6703–6713, 2005.
- [33] T.M. Atanackovic, S. Pilipovic, D. Zorica, Distributed-order fractional wave equation on a finite domain. Stress relaxation in a rod, Int. J. Eng. Sci., vol. 49, pp. 175–190, 2011.



- [34] T. M. Atanackovic, S. Pilipovic, and D. Zorica, Distributed-order fractional wave equation on a finite domain: creep and forced oscillations of a rod, *Contin. Mech. Thermodyn*, vol. 23, no. 4, pp. 305–318, 2011.
- [35] K. Atkinson, *An Introduction to Numerical Analysis*, 2nd ed. Wiley, 1989.
- [36] R.L. Bagley and P.J. Torvik, A theoretical basis for the application of fractional calculus to viscoelasticity, *J. Rheo.*, vol. 27, pp. 201–210, 1983.
- [37] D. Baleanu, K. Diethelm, E. Scalas, J.J. Trujillo, *Fractional Calculus Models and Numerical Methods*, in: *Series on Complexity Non linearity and Chaos*, World Scientific, Boston, 2012.
- [38] K. Barrett, Uniform numerical methods for problems with initial and boundary layer, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 18, no. 8, 1264-1264, 1982.
- [39] J. J. Batzel and F. Kappel, Time delay in physiological systems: Analyzing and modeling its impact, *Math. Biosci.*, vol. 234, pp. 61–74, 2011.
- [40] A. Bellen and M. Zennaro, *Numerical methods for delay differential equations*. Oxford university press, 2003.
- [41] M. Benchohra, J. Henderson, S.K. Ntouyas, and A. Ouahab, Existence results for fractional order functional differential equations with infinite delay, *J. Math. Anal. Appl.*, vol. 338, pp. 1340-1350, 2008.
- [42] D. Benson, S.W. Wheatcraft, M.M. Meerschaert, Application of a fractional advection-dispersion equation, *Water Resour. Res.*, vol. 36, pp. 1403–1413, 2000.
- [43] D. Benson, S.W. Wheatcraft, M.M. Meerschaert, The fractional-order governing equation of Lévy motion, *Water Resour. Res.*, vol. 36, pp. 1413-1423, 2000.
- [44] D. Benson, R. Schumer, M.M. Meerschaert, and S.W. Wheatcraft, Fractional dispersion, levy motion, and the made tracer tests, *Transp. Porous Media*, vol. 42, pp. 211-240, 2001.
- [45] S. Bhalekar, Dynamical analysis of fractional order Ucar prototype delayed system, *Signal, Image Video Process.*, vol. 6, no. 3, pp. 513-519, 2012.
- [46] S. Bhalekar and V. Daftardar-Gejji, Fractional ordered Liu system with time-delay, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, vol. 15, no. 8, pp. 2178-2191, 2010.
- [47] ] Bhalekar S, Daftardar-Gejji V. A predictor-corrector scheme for solving nonlinear delay differential equations of fractional order. *J Fract Calc Appl*, vol. 1(5), pp. 1-9, 2011.

- [48] S. Bhalekar, V. Daftardar-Gejji, D. Baleanu, and R. Magin, Fractional Bloch equation with delay, *Comput. Math. with Appl.*, vol. 61, no. 5, pp. 1355-1365, 2011.
- [49] A.H. Bhrawy and M.A. Zaky, Numerical algorithm for the variable-order Caputo fractional functional differential equation, *Nonlinear Dyn.*, vol. 85, no. 3, pp. 1815-1823, 2016.
- [50] J.C. Butcher, *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*. 2008.
- [51] M. Caputo, Distributed order differential equations modelling dielectric induction and diffusion, *Fract. Calc. Appl. Anal.*, vol. 4, pp. 421-442, 2001.
- [52] B.A. Carreras, V.E. Lynch, G.M. Zaslavsky, Anomalous diffusion and exit time distribution of particle tracers in plasma turbulence models, *Phys. Plasma*, vol. 8, pp. 5096-5103, 2001.
- [53] L. Chang, G.-Q. Sun, Z. Wang, and Z. Jin, Rich dynamics in a spatial predator-prey model with delay, *Appl. Math. Comput.*, vol. 256, pp. 540-550, 2015.
- [54] F. Chen and Y. Zhou, Attractivity of fractional functional differential equations, *Comput. Math. with Appl.*, vol. 62, no. 3, pp. 1359-1369, 2011.
- [55] C. W. Clenshaw and A. R. Curtis, A method for numerical integration on an automatic computer, *Numer. Math.*, vol. 2, no. 1, pp. 197-205, 1960.
- [56] F. Colombo, D. Guidetti, A global in time existence and uniqueness result for a semilinear integrodifferential parabolic inverse problem in Sobolev spaces, *Math. Models Meth. in Applied Sciences*, vol. 17, pp. 537-565, 2007.
- [57] R.V. Culshaw, S. Ruan, and G. Web, A mathematical model of cell-to-cell spread of HIV-1 that includes a time delay, *J. Math. Biol.*, vol. 46, pp. 425-444, 2003.
- [58] W. Czernous and Z. Kamont, Implicit difference methods for parabolic functional differential problems of the Neumann type, *Nonlinear Oscil.*, vol. 11, no. 3, pp. 345-364, 2008.
- [59] V. Daftardar-Gejji and A. Babakhani, Analysis of a system of fractional differential equations, *J. Math. Anal. Appl.*, vol. 293, no. 2, pp. 511-522, 2004.
- [60] V. Daftardar-Gejji, Y. Sukale, and S. Bhalekar, Solving fractional delay differential equations: A new approach, *Fract. Calc. Appl. Anal.*, vol. 18, no. 2, pp. 400-418, 2015.
- [61] V. Daftardar-Gejji, Y. Sukale, and S. Bhalekar, A new predictor-corrector method for fractional differential equations, *Appl. Math. Comput.*, vol. 244, pp. 158-182, 2014.
- [62] M. Dehghan and R. Salehi. Solution of a nonlinear time-delay model in biology via semi-analytical approaches, *Computer Physics Communications*, vol. 181, pp. 1255-1265, 2010.

- [63] J. Deng and H. Qu, New uniqueness results of solutions for fractional differential equations with infinite delay, *Comput. Math. with Appl.*, vol. 60, no. 8, pp. 2253-2259, 2010.
- [64] R. H. De Staelen and M. Slodichka, Reconstruction of a convolution kernel in a semilinear parabolic problem based on a global measurement, *Nonlinear Anal. Theory, Methods Appl.*, vol. 112, pp. 43-57, 2015.
- [65] K. Diethelm, *The Analysis of Fractional differential equations*. Berlin: Springer, 2010.
- [66] K. Diethelm and N.J. Ford, Analysis of fractional differential equations, *J. Math. Anal. Appl.*, vol. 265, no. 2, pp. 229-248, 2002.
- [67] K. Dithelm, N.J. For. Numerical analysis for distributed order differential equations, *J. Comput. Appl. Math.*, vol. 225, pp. 96--104, 2009.
- [68] Y.B. Ding and H. C. Ye, A fractional-order differential equation model of HIV infection of  $CD4^+$  T-cells, *Math. Comput. Model.*, vol. 50, no. 3-4, pp. 386-392, 2009.
- [69] E.H. Doha, A.H. Bhrawy, and S.S. Ezz-Eldien, A Chebyshev spectral method based on operational matrix for initial and boundary value problems of fractional order, *Comput. Math. with Appl.*, vol. 62, no. 5, pp. 2364-2373, 2011.
- [70] E.P. Doolan, J.J.H. Miller, and W. H. A. Schilders, Uniform Numerical Methods for Problems with Initial and Boundary Layers, *Math. Comput.*, vol. 39, no. 160, pp. 739-742, 1983.
- [71] R. Du, W. R. Cao, and Z. Z. Sun, A compact difference scheme for the fractional diffusion-wave equation, *Appl. Math. Model.*, vol. 34, pp. 2998–3007, 2010.
- [72] S. Dubey and M. Sharma, Solutions to fractional functional differential equations with nonlocal conditions, *Fract. Calc. Appl. Anal.*, vol. 17, no. 3, pp. 655–673, 2014.
- [73] E. Isaacson and H.B. Keller, *Analysis of Numerical Methods*. New York, Wiley, 1966.
- [74] J.A. Ferreira, Energy estimates for delay diffusion-reaction equations, *J. Comput. Appl. Math.*, vol. 26, no. 4, pp. 536–553, 2008.
- [75] N.J. Ford, M.L. Morgado. Distributed order equations as boundary value problems, *Computer and Mathematics with applications*, vol. 64, pp. 2973–2981, 2012.
- [76] U. Forys, Biological delay systems and the mikhaïlov criterion of stability, *J. Biol. Syst.*, vol. 12, no. 1, pp. 45-60, 2004.
- [77] A.C. Fowler, Asymptotic methods for delay equations, *J. Eng. Math.*, vol. 53, no. 3-4, pp. 271-290, 2005.

- [78] G. Gao, Z. Sun. Two alternating direction implicit difference schemes with the extrapolation method for the two-dimensional distributed-order differential equations, *Computer and Mathematics with applications*, vol. 69, pp. 926–984, 2015.
- [79] G. Gao, H. Sun, Z. Sun. Some high order difference schemes for distributed-order differential equations, *Journal of Computational Physics*, vol. 289, pp. 337–359, 2015.
- [80] P. Garcia, M.A. Castro, J.A. Martin, and A. Sirvent, Convergence of two implicit numerical schemes for diffusion mathematical models with delay, *Math. Comput. Model.*, vol. 52, no. 7-8, pp. 1279–1287, 2010.
- [81] M. Ghasemi, M. Fardi, and R. Khoshsiar Ghaziani, Numerical solution of nonlinear delay differential equations of fractional order in reproducing kernel Hilbert space, *Appl. Math. Comput.*, vol. 268, pp. 815-831, 2015.
- [82] R. Gorenflo, Y. Luchko, M. Stojanovic. Fundamental solution of a distributed order time fractional diffusion wave equation as a probability density, *Fract. Calc. Appl. Anal.*, vol. 16, no. 2, 297–316, pp. 2013.
- [83] E. Hairer, S.P. Nørset, and G. Wanner, *Solving Ordinary Differential Equations I*. 1993.
- [84] Z. Hao, K. Fan, W. Cao, and Z. Sun, A finite difference scheme for semi linear space-fractional diffusion equations with time delay, *Appl. Math. Comput.*, vol. 275, pp. 238–254, 2016.
- [85] T.T. Hartley, C.F. Lorenzo, *Fractional System Identification: An Approach Using Continuous Order-distributions*, NASA Tech. Memo, 1999.
- [86] Y. Hatano and N. Hatano, Dispersive transport of ions in column experiments: an explanation of long-tailed profiles, *Water Resour. Res.*, vol. 34, pp. 1027-1033, 1998.
- [87] F. Hofling and T. Franosch, Anomalous transport in the crowded world of biological cells, *Reports Prog. Phys.*, vol. 76, pp. 46602, 2013.
- [88] F. Huang, A time-space collocation spectral approximation for a class of time fractional differential equations, *Int. J. Differ. Equ.*, vol. 19, Article ID 495202, 2012.
- [89] Z. Jackiewicz, H. Liu, B. Li, and Y. Kuang, Numerical simulations of traveling wave solutions in a drift paradox inspired diffusive delay population model, *Math. Comput. Simul.*, vol. 96, pp. 95–103, 2014.
- [90] H. Jiang, Existence results for fractional order functional differential equations with impulse, *Comput. Math. with Appl.*, vol. 64, no. 10, pp. 3477-3483, 2012.

- [91] Y. Jia, Y. Xu, and M. Lin, A numerical solution for variable order fractional functional differential equation, *Appl. Math. Lett.*, vol. 64, pp. 125-130, 2017.
- [92] C. Johnson, *Uniform Numerical Methods for Problems with Initial and Boundary Layers* (E.P. Doolan, J.J.H. Miller and W.H.A. Schilders), *SIAM Rev.*, vol. 25, no. 4, pp. 597-598, 1983.
- [93] G. Jumarie, Modified Riemann-Liouville derivative and fractional Taylor series of non-differentiable functions further results, *Comput. Math. with Appl.*, vol. 51, no. 9-10, pp. 1367-1376, 2006.
- [94] Z. Kamont, W. Czernous, Implicit difference methods for Hamilton-Jacobi functional differential equations, *Numerical Analysis and Applications*, vol. 2, no. 1, pp. 57–70, 2009.
- [95] Z. Kamont, *Hyperbolic Functional Differential Inequalities and Applications*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1999.
- [96] I. Karatay, N. Kale, and S.R. Bayramoglu, A new difference scheme for time fractional heat equations based on Crank-Nicholson method, *Fract. Calc. Appl. Anal.*, vol. 16, pp. 893–910, 2013.
- [97] J.T. Katsikadelis. Numerical solution of distributed order fractional differential equations, *J. Comput. Phys.*, vol. 259, pp. 11–22, 2014.
- [98] A. Kilbas, H. Srivastava, J. Trujillo, *Theory and applications of fractional differential equations*. Amsterdam, Elsevier, 2006
- [99] J.W. Kirchner, X. Feng, C. Neal, Fractal stream chemistry and its implications for contaminant transport in catchments, *Nature*, vol. 403, pp. 524-526, 2000.
- [100] M.M. Khader, S. Talaat. El. Danaf, A.S. Hendy. A computational matrix method for solving systems of high order fractional differential equations, *Applied Mathematical Modelling*, vol. 37, pp. 4035–4050, 2013.
- [101] K. Krol, Asymptotic properties of fractional delay differential equations, *Appl. Math. Comput.*, vol. 218, no. 5, pp. 1515-1532, 2011.
- [102] K. Kropielnicka, Convergence of Implicit Difference Methods for Parabolic Functional Differential Equations. *Int. Journal of Mat. Analysis*, vol. 1, no. 6, 257–277, 2007.
- [103] V. Lakshmikantham, Theory of fractional functional differential equations, *Nonlinear Anal.*, vol. 69, no. 10, pp. 3337–3343, 2008.

- [104] A. Lekomtsev, V., Pimenov, Convergence of the scheme with weights for the numerical solution of a heat conduction equation with delay for the case of variable coefficient of heat conductivity, *Appl. Math. Comput.*, vol. 256, pp. 83–93, 2015.
- [105] R.J. Leveque, *Finite Difference Methods for Differential Equations, Notes*, vol. 26, no. 9, pp. 1998-2005, 2005.
- [106] Y. Li, Y. Chen, and I. Podlubny, Mittag-Leffler stability of fractional order nonlinear dynamic systems, *Automatica*, vol. 45, no. 8, pp. 1965-1969, 2009.
- [107] X. Li, M. Xu, X. Jiang, Homotopy perturbation method to time- fractional diffusion equation with a moving boundary conditions, *Appl. Math. Comput.*, vol. 208, pp. 434–439, 2009.
- [108] F. Liu, M. M. Meerschaert, R. J. McGough, P. Zhuang, and Q. Liu, Numerical Methods for Solving the Multi-Term Time-Fractional Wave-Diffusion Equation., *Fract. Calc. Appl. Anal.*, vol. 16, no. 1, pp. 9-25, 2013.
- [109] F. Liu, I. Turner, V. Anh, Q. Yang, and K. Burrage, A numerical method for the fractional Fitzhugh-Nagumo monodomain model, *Math. Soc*, vol. 54, pp. 608-629, 2012.
- [110] F. Liu, P. Zhuang, V. Anh, I. Turner, K. Burrage, Stability and convergence of the difference methods for the space–time fractional advection–diffusion equation. *Appl. Math. Comput.*, vol. 191, pp. 12–20, 2007.
- [111] F. Liu, P. Zhuang, K. Burrage, Numerical methods and analysis for a class of fractional advection–dispersion models. *Computers and Mathematics with Applications*. vol. 64, 2990–3007, 2012.
- [112] F. Liu, P. Zhuang, I. Turner, V. Anh, and K. Burrage, A semi-alternating direction method for a 2-D fractional FitzHugh-Nagumo monodomain model on an approximate irregular domain, *J. Comput. Phys.*, vol. 293, pp. 252-263, 2015.
- [113] P.P. Liu, Periodic solutions in an epidemic model with diffusion and delay, *Appl. Math. Comput.*, vol. 265, pp. 275–291, 2015.
- [114] Y. Luchko, Boundary value problems for the generalized time-fractional diffusion equation of distributed order, *Fract. Calc. Appl. Anal.*, vol. 12, pp. 409-422, 2009.
- [115] Y. Luo and Y. Chen, Fractional order [proportional derivative] controller for a class of fractional order systems, *Automatica*, vol. 45, no. 10, pp. 2446-2450, 2009.
- [116] J.A.T. Machado, Discrete-time fractional-order controllers, *Fract. Calc. Appl. Anal.*, vol. 4, pp. 47–66, 2001.

- [117] F. Mainardi, G. Pagnini, A. Mura, R. Gorenflo. Time-fractional diffusion of distributed order, *J. Vib. Control*, vol. 14, pp. 1267–1290, 2008.
- [118] R.L. Magin, *Fractional Calculus in Bioengineering*, Begell House Publishers, 2006.
- [119] R.L. Magin, Fractional calculus models of complex dynamics in biological tissues, *Comput. Math. with Appl.*, vol. 59, no. 5, pp. 1586-1593, 2010.
- [120] J.C. Mason and D.C. Handscomb, *Chebyshev Polynomials*. 2003.
- [121] M.M. Meerschaert, D.A. Benson, H.P. Scheffler, P. Becker-Kern, Governing equations and solutions of anomalous random walk limits, *Phys. Rev.* vol. E 66, pp. 102R-105R, 2002.
- [122] M. M. Meerschaert, E. Nane, and P. Vellaisamy, Distributed-order fractional diffusions on bounded domains, *J. Math. Anal. Appl.*, vol. 379, pp. 216-228, 2011.
- [123] M.M. Meerschaert and C. Tadjeran, Finite difference approximations for fractional advection–dispersion flow equations, *J. Comput. Appl. Math.* vol. 172, no. 1, pp. 65-77, 2004.
- [124] M.M. Meerschaert and C. Tadjeran, Finite difference approximations for two-sided space-fractional partial differential equations, *Appl. Numer. Math.*, vol. 56, no. 1, pp. 80-90, 2006.
- [125] V. Mendez, S. Fedotov, W. Horsthemke, *Reaction-Transport Systems*. Berlin, Springer, 2010.
- [126] R. Metzler, J. Klafter, The restaurant at the end of the random walk: recent developments in the description of anomalous transport by fractional dynamics, *J. Phys.*, vol. A 37, pp. R161-R208, 2004.
- [127] K. Miller, B. Ross. *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*. New York, Wiley, 1993.
- [128] B. P. Moghaddam and Z. S. Mostaghim, A numerical method based on finite difference for solving fractional delay differential equations, *J. Taibah Univ. Sci.*, vol. 7, no. 3, pp. 120-127, 2013.
- [129] C. A. Monje, B. M. Vinagre, V. Feliu, and Y. Chen, Tuning and auto-tuning of fractional order controllers for industry applications, *Control Eng. Pract.*, vol. 16, no. 7, pp. 798-812, 2008.
- [130] M. L. Morgado, N. J. Ford, and P. M. Lima, Analysis and numerical methods for fractional differential equations with delay, *J. Comput. Appl. Math.*, vol. 252, 159-168, 2013.
- [131] M.L. Morgado, M. Rebelo. Numerical approximation of distributed order reaction–diffusion equations, *J. Comput. Appl. Math.*, vol. 275, pp. 216–227, 2015.

- [132] B. Parsa Moghaddam and Z. Salamat Mostaghim, A novel matrix approach to fractional finite difference for solving models based on nonlinear fractional delay differential equations, *Ain Shams Eng. J.*, vol. 5, no. 2, pp. 585-594, 2014.
- [133] S.G. Oldham, J. Spanier, *The fractional calculus*. New York, Acad. Press, 1974.
- [134] G. Peng, Synchronization of fractional order chaotic systems, *Phys. Lett. Sect. A Gen. At. Solid State Phys.*, vol. 363, no. 5-6, pp. 426-432, 2007.
- [135] Z. Ouyang, Existence and uniqueness of the solutions for a class of nonlinear fractional order partial differential equations with delay, *Comput. Math. with Appl.*, vol. 61, no. 4, pp. 860-870, 2011.
- [136] V.G. Pimenov, A.B. Lozhnikov, Numerical methods for evolutionary equations with delay and software package PDDE, Springer, *Theoretical Computer Science and General Issues, NAA 2012*, vol. 8236, pp. 437-444, 2013.
- [137] I. Podlubny, *Fractional differential equations*, San Diego, Acad. Press, 1999.
- [138] M. Raberto, E. Scalas, F. Mainardi, Waiting-times and returns in high-frequency financial data: an empirical study, *Physica*, vol. 314, pp. 749-755, 2002.
- [139] D. V. V Ramana Reddy, a. Sen, and G. L. L. Johnston, Time delay effects on coupled limit cycle oscillators at Hopf bifurcation, *Phys. D Nonlinear Phenom.*, vol. 129, no. 1-2, pp. 15-34, 1999.
- [140] H. Ramos and J. Vigo-Aguiar, A fourth-order Runge-Kutta method based on BDF-type Chebyshev approximations, *J. Comput. Appl. Math.*, vol. 204, no. 1, pp. 124-136, 2007.
- [141] J. Ren and Z.Z. Sun, Maximum norm error analysis of difference schemes for fractional diffusion equations, *Appl. Math. Comput.*, vol. 256, pp. 299-314, 2015.
- [142] R.D. Richtmyer and K.W. Morton, *Difference Methods for Initial-Value Problems*. Malabar, FL: Krieger Publishing, 1994.
- [143] F. A. Rihan, Computational Methods for Delay Parabolic and Time-Fractional Partial Differential Equations, *Numer. Methods Partial Differ. Equ.*, vol. 26, no. 6, pp. 1557-1571, 2009.
- [144] H. Saeedi, M. M. Moghadam, N. Mollahasani, and G. N. Chuev, A CAS wavelet method for solving nonlinear Fredholm integro-differential equations of fractional order, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 16, no. 3. pp. 1154-1163, 2011.



- [145] L. Sabatelli, S. Keating, J. Dudley, P. Richmond, Waiting time distributions in financial markets, *Eur. Phys. J. B*, vol. 27, pp. 273–275, 2002.
- [146] E. Scalas, R. Gorenflo, and F. Mainardi, Fractional calculus and continuous-time finance, *Physica A*, vol. 284, pp. 376–384, 2000.
- [147] W. Schneider and W. Wyss, Fractional diffusion and wave equations, *J. Math. Phys.*, vol. 30, pp. 134–144, 1989.
- [148] E. Schumacher. *Ordinary and Fractional Diffusion in Simple Biological Models*. Louvain-la-Neuve, 2010.
- [149] J. Shi and R. Shivaji, Persistence in reaction diffusion models with weak Allee effect, *J. Math. Biol.*, vol. 52, no. 6, pp. 807–829, 2006.
- [150] M.F. Shlesinger, B.J. West, J. Klafter, Lévy dynamics of enhanced diffusion: application to turbulence, *Phys. Rev. Lett.*, vol. 58, pp. 1100–1103, 1987.
- [151] I.M. Sokolov, J. Klafter, A. Blumen, Fractional kinetics, *Phys. Today Nov.*, pp. 28–53, 2002.
- [152] N. Su, Mass-time and space-time fractional partial differential equations of water movement in soils: Theoretical framework and application to infiltration, *J. Hydrol.*, vol. 519, pp. 1792–1803, 2014.
- [153] N. Su, P.N. Nelson, S. Connor, The distributed-order fractional diffusion-wave equation of groundwater flow: Theory and application to pumping and slug tests, *Journal of Hydrology*, vol. 529, pp. 1262–1273, 2015.
- [154] Y. Su, J. Wei, and J. Shi, Hopf bifurcations in a reaction-diffusion population model with delay effect, *J. Differ. Equations*, vol. 247, pp. 1156–1184, 2009.
- [155] Z.Z. Sun and X. Wu, A fully discrete difference scheme for a diffusion-wave system, *Appl. Numer. Math.*, vol. 56, no. 2, pp. 193–209, 2006.
- [156] H. Tadjeran, C. Meerschaert, and M. Scheffler, A second-order accurate numerical approximation for the fractional diffusion equation, *J. Comput. Phys.*, vol. 56, no. 1, pp. 65–77, 2006.
- [157] Z. Tai and X. Wang, Controllability of fractional-order impulsive neutral functional infinite delay integrodifferential systems in Banach spaces, *Appl. Math. Lett.*, vol. 22, no. 11, pp. 1760–1765, 2009.
- [158] Y. Tang and L. Zhou, Hopf bifurcation and stability of a competition diffusion system with distributed delay, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, vol. 41, no. 3, pp. 579–597, 2005.

- [159] L. Tavernini, Finite Difference Approximations for a Class of Semilinear Volterra Evolution Problems. *SIAM J. Numer. Anal.*, vol. 14., no. 5, 931–949, 1977.
- [160] J. A. Tenreiro MacHado, Time-delay and fractional derivatives, *Adv. Differ. Equations*, vol. 2011, 2011.
- [161] J. Tumwiine, S. Luckhaus, J.Y.T. Mugisha, and L.S. Luboobi, An age-structured mathematical model for the within host dynamics of malaria and the immune system, *J. Math. Model Algor.*, vol. 7, pp. 79–97, 2008.
- [162] P.J. Van Der Houwen, B.P. Sommeijer, C.T.H. Baker, On the stability of predictor-corrector methods for parabolic equations with delay. *IMA J. Numer. Anal.* vol. 6, pp. 1–23, 1986.
- [163] Z. Wang, X. Huang, and G. D. Shi, Analysis of nonlinear dynamics and chaos in a fractional order financial system with time delay, *Comput. Math. with Appl.*, vol. 62, no. 3, pp. 1531-1539, 2011.
- [164] Z. Wang, X. Huang, and J. Zhou, A numerical method for delayed fractional-order differential equations: Based on G-L definition, *Appl. Math. Inf. Sci.*, vol. 7, no. 2 L, pp. 525-529, 2013.
- [165] H. Wang, K. Wang, and T. Sircar, A direct  $O(N \log^2 N)$  finite difference method for fractional diffusion equations, *J. Comput. Phys.*, vol. 229, no. 21, pp. 8095-8104, 2010.
- [166] J. Wu, *Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations*, New York, Springer-Verlag, 1996.
- [167] W. Wyss, The fractional diffusion equation, *J. Math. Phys.*, vol. 27, pp. 27-82, 1986.
- [168] Y. Yan and C. Kou, Stability analysis of a fractional differential model of HIV infection of  $CD4^+$  T-cells with time delay, *Math. Comput. Simul.*, vol. 82, pp. 1572–1585, 2012.
- [169] Z. Yang and J. Cao, Initial value problems for arbitrary order fractional differential equations with delay, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, vol. 18, no. 11, pp. 2993-3005, 2013.
- [170] H. Ye, F. Liu, and V. Anh, Compact difference scheme for distributed-order time-fractional diffusion-wave equation on bounded domains, *J. Comput. Phys.*, vol. 298, pp. 652-660, 2015.
- [171] G.M. Zaslavsky, D. Stevens, H. Weitzner, Self-similar transport in incomplete chaos, *Phys. Rev.*, vol. E48, pp. 1683-1694, 1993.
- [172] B. Zhang and Y. Zhou, *Qualitative Analysis of Delay Partial Difference Equations*. New York, Hindawi Publishing Corporation, 2007.

- [173] Q. Zhang and C. Zhang, A new linearized compact multisplitting scheme for the nonlinear convection-reaction-diffusion equations with delay, *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat.*, vol. 18, pp. 3278-3288, 2013.
- [174] Q. Zhang, M. Ran, and D. Xu, Analysis of the compact difference scheme for the semilinear fractional partial differential equation with time delay, *Appl. Anal.*, vol. 2016, pp. 1-18, 2016.
- [175] Z.B. Zhang and Z.Z. Sun, A Crank-Nicolson scheme for a class of delay nonlinear parabolic differential equations, *J. Numer. Methods Comput. Appl.*, vol. 31, pp. 131-140, 2010.
- [176] Z.B. Zhang and Z.Z. Sun, A linearized compact difference scheme for a class of nonlinear delay partial differential equations, *Appl. Math. Model.*, vol. 37, pp. 742-752, 2013.
- [177] Y. Zhou, F. Jiao, and J. Li, Existence and uniqueness for fractional neutral differential equations with infinite delay, *Nonlinear Anal. Theory, Methods Appl.*, vol. 71, no. 7-8, pp. 3249-3256, 2009.
- [178] B. Zubik-Kowal, The method of lines for parabolic differential-functional equations, *IMA J. Numer. Anal.*, vol. 17, pp. 103-123, 1997.
- [179] A.S. Hendy, V.G. Pimenov. Numerical method for solving delayed fractional differential equations based on BDF-type Chebyshev approximations // Алгоритмический анализ неустойчивых задач. Тезисы докладов Всероссийской конференции с международным участием, посвященной памяти В.К. Иванова. Челябинск, Издательский центр ЮУрГУ, 2014. С. 138.
- [180] Pimenov V.G., Hendy A.S. A linearized difference scheme for a class of fractional partial differential equations with delay // Теория управления и математическое моделирование. Тезисы докладов Всероссийской конференции с международным участием, посвященной памяти профессора Н.В. Азбелева и профессора Е.Л. Тонкова. Ижевск, УдГУ, 2015. С. 19-20.
- [181] A.S. Hendy. A linearized difference scheme for a class of fractional partial differential equations with delay // Известия Института математики и информатики УдГУ. Т. 2 (46), 2015, С. 236-243.
- [182] V.G. Pimenov, A.S. Hendy. Numerical methods for the equation with fractional derivative on state and with functional delay on time // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. Т. 20, вып. 5, С. 1358-1361, 2015.

- [183] V. Pimenov and A. Hendy. Numerical studies for fractional functional differential equations with delay based on BDF-type shifted Chebyshev approximations, *Abstract and Applied Analysis*, Article ID 510875, pp. 1–12, 2015.
- [184] V.G. Pimenov, A.S. Hendy. Numerical approximation of solutions for distributed order fractional diffusion equations with delay, *Proceedings of the 15th International Conference on Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering*, Rota, Cadiz - Spain, pp. 921–924, 2015.
- [185] V.G. Pimenov, A.S. Hendy, R.H. De Staelen. On a class of non-linear delay distributed order fractional diffusion equations, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 318, pp. 433–443, 2017.
- [186] V.G. Pimenov, A.S. Hendy. A fractional analog of Crank-Nicholson method for the two sided space fractional partial equation with functional delay, *Ural Mathematical Journal*, vol 2, No 1, pp. 48–57, 2016.
- [187] V.G. Pimenov, A.S. Hendy. Numerical methods for the fractional diffusion equation with heredity, *Proceedings of the 47th International Youth School-conference "Modern Problems in Mathematics and its Applications Yekaterinburg*, pp. 276–283, 2016.
- [188] V.G. Pimenov, A.S. Hendy. Adaptivity of the alternating direction method for fractional reaction diffusion equation with delay effects in electrocardiology // *EXPERIMENTAL AND COMPUTATIONAL BIOMEDICINE: Russian Conference with International Participation in memory of Professor Vladimir S. Marchasin*, Abstract book, p. 24, Ekaterinburg, 2016.
- [189] В.Г.Пименов, А.С.Хенди. Неявный численный метод решения дробного уравнения адвекции-диффузии с запаздыванием // *Труды ИММ УрО РАН Т. 22, № 2. С. 218–227*, 2016.
- [190] V. Pimenov, A. Hendy. Numerical methods for the control fractional advection-diffusion models with heredity // *International Conference in memory of Academician Arkady Kryazhimskiy "Systems Analysis: Modeling and Control Ekaterinburg*, Book of Abstracts, pp. 93-95. 2016.
- [191] Pimenov V.G., Hendy A.S. Numerical solution for a class of semi-linear delayed diffusion-wave system with time fractional order // *Материалы тезисов Международной конференции "Актуальные проблемы прикладной математики и автоматизации Терскол*, С. 252–254, 2016.