На правах рукописи

Успенский Александр Александрович

Методы и алгоритмы построения негладких решений краевых задач теории позиционных дифференциальных игр и оптимального управления

01.01.02 – дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ
на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Екатеринбург – 2017

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук

Научный консультант:	Ушаков Владимир Николаевич, доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, профессор.
Официальные оппоненты:	Никольский Михаил Сергеевич, доктор физико-математических наук, профессор, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук, ведущий научный сотрудник.
	Родина Людмила Ивановна, доктор физико-математических наук, доцент, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования Удмуртский государственный университет, заведующая кафедрой математического анализа.
	Шориков Андрей Федорович, доктор физико-математических наук, профессор, Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина, Уральский энергетический институт, профессор кафедры прикладной математики.
Ведущая организация:	Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования Санкт-Петербургский государственный университет.

Защита состоится 24 мая 2017 года в 14 часов на заседании диссертационного совета Д 004.006.01 на базе Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук по адресу: 620990, г. Екатеринбург, ул. Софьи Ковалевской, 16.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИММ УрО РАН и на сайте ИММ УрО РАН: http://www.imm.uran.ru/C16/Diss/ .

Автореферат разослан “ “____________2017 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор физико-математических наук Костоусова Елена Кирилловна

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования и степень ее разработанности. Задачи оптимального управления и дифференциальные игры тесно связаны с краевыми задачами Коши и Дирихле для уравнений в частных производных первого порядка (УЧППП) и особенно – с краевыми задачами для уравнений типа Гамильтона-Якоби (УГЯ). При этом математические модели, которые формализуются в виде краевых задач для УЧППП и УГЯ, встречаются в различных разделах математики, физики, механики, акустики, при решении прикладных задач экономики, экологии, биологии и многих других отраслей знания. Объединяющая эти задачи особенность – негладкость, присущая их решениям, которые понимаются здесь в обобщенном смысле. Наличие у функций свойства недифференцируемости существенно затрудняет их построение как в аналитическом виде, так и в аппроксимационной форме. Многообразие сфер приложения УЧППП и УГЯ и сложности формирования обобщенных решений этих уравнений мотивируют исследователей на создание и развитие методов и разработку алгоритмов конструирования таких функций.

Всплеск интереса к изучению негладких решений УЧППП обозначился в середине XX-го века. В 50-70-е годы недифференцируемые решения краевых задач для УЧППП исследовались в работах как отечественных, так и зарубежных математиков. Они прибегали к обобщению классического метода характеристик, сводящего решение краевой задачи к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений, либо использовали иные подходы, опирающиеся, в частности, на методы и конструкции функционального анализа и математической физики.

В начале второй половины прошлого века стала формироваться теория дифференциальных игр. Одна из первых постановок антагонистических игр принадлежат Р. Айзексу[1], работы которого оказали значительное влияние на развитие динамического программирования, становление которого связано с трудами Р. Беллмана[2]. Фундаментальный вклад в построение теории математического управления (как в игровой постановке, так и в рамках концепции оптимального управления) внесли научные школы академиков Н.Н. Красовского[3,4,5,6] и Л.С. Понтрягина[7,8].

---

[1] *Айзекс Р.* Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 479 с.
[2] *Беллман Р.* Динамическое программирование. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. 400 с.
[3] *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 475 с.
[4] *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.

Унифицикация, введенная в дифференциальные игры Н.Н. Красовским[9,10], вскрыла наличие глубокой взаимосвязи теории позиционных дифференциальных игр с теорией обобщенных решений УЧППП и УГЯ, в том числе, с теорией минимаксных решений А.И. Субботина[11] и теорией вязкостных решений математической физики М.Дж. Крэндалла и П.Л. Лионса[12]. Современная теория минимаксных и/или вязкостных решений УГЯ базируется на ключевом свойстве слабой инвариантности (стабильности) графиков таких решений относительно обобщенных характеристик – решений дифференциальных включений, определяемых гамильтонианом уравнения[13]. Гладкие (классические) и кусочно-гладкие решения подходящих УГЯ составляли основной инструмент в исследованиях дифференциальных игр еще в работах Р. Айзекса и Р. Беллмана.

Тематика краевых задач Коши и Дирихле для УЧППП и, в том числе, УГЯ находится в тесной взаимосвязи с проблемами и задачами, относящимися к конструированию и оценке множеств достижимости и трубок траекторий управляемых систем. К настоящему времени в работах А.Б. Куржанского[14,15], Ф.Л. Черноусько[16] и их сотрудников[17,18,19,20] предложен ряд методов приближенного вычисления множеств достижимости и трубок

---

[5] *Ушаков В.Н.* К задаче построения стабильных мостов в дифференциальной игре сближения-уклонения // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1980. №.4. С.29-36.

[6] *Субботин А.И., Ченцов А.Г.* Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 288 с.

[7] *Понтрягин Л. С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961. 391 с.

[8] *Болтянский В.Г.* Математические методы оптимального управления. М.: Наука, 1966. 308 с.

[9] *Красовский Н.Н.* К задаче унификации дифференциальных игр // Докл. АН СССР. 1976. Т. 226, № 6. С. 1260-1263.

[10] *Красовский Н.Н.* Унификация дифференциальных игр // Тр. Ин-та математики и механики УНЦ АН СССР. Свердловск, 1977. Вып. 24: Игровые задачи управления. С. 32-45.

[11] *Субботин А.И.* Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона-Якоби. М.: Наука. 1991. 214 с.

[12] *Crandall M.G., Lions P.L.* Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations. em Trans. Amer. Math.Soc. 1983. Vol. 277. No. 1. P. 1-42.

[13] *Субботина Н.Н., Колпакова Е.А., Токманцев Т.Б., Шагалова Л.Г.* Метод характеристик для уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана // РИО УрО РАН, Екатеринбург. 2013. 244 с.

[14] *Куржанский А.Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 390 с.

[15] *Kurzhanski A.B., Vályi I.* Ellipsoidal Calculus for Estimation and Control. Boston. Birkhäuser, 1997. 321 p.

[16] *Черноусько Ф.Л.* Оценивание фазового состояния динамических систем. М.: Наука, 1988. 319 с.

[17] *Kurzhanski A.B., Filippova T.F.* On the theory of trajectory tubes - a mathematical formalism for uncertain dynamics, viability and control // Advances in Nonlinear Dynamics and Control. Boston: Birkhauser, 1993. P.122-188.

[18] *Черноусько Ф.Л., Ананьевский И.М., Решмин С.А.* Методы управления нелинейными механическими системами. М.: Физматлит, 2006. 328 с.

[19] *Филиппова Т.Ф.* Дифференциальные уравнения эллипсоидальных оценок множеств достижимости нелинейной динамической управляемой системы // Тр. ИММ УрО РАН. 2010. Т.16, № 1. С.223–232.

[20] *Гусев М.И.* Внутренние аппроксимации множеств достижимости управляемых систем с фазовыми ограничениями // Тр. ИММ УрО РАН. 2013. Т.19, № 4. С.73–88.

траекторий для некоторых классов управляемых систем. На базе этих методов разработаны вычислительные алгоритмы.

Работы Л.В. Овсянникова[21], его последователей и учеников[22], выполненные на стыке алгебры и математического анализа, позволили создать методы и алгоритмы для эффективного исследования конкретных дифференциальных уравнений, возникающих в качестве математических моделей в физике, механике, теории управления, вычислительной математике и других областях знания.

Полезными с точки зрения создания конструктивных подходов к построению обобщенных решений краевых задач УЧППП, оказались методы теории особенностей дифференцируемых отображений, разработанные В.И. Арнольдом[23], его коллегами и последователями. Средствами этой теории, в частности, формируются списки типичных особенностей каустик и волновых фронтов, предлагаются подходы к построению дискриминантных множеств. Эти же подходы распространяются на задачи геометрической оптики, позволяя формировать эволюцию волновых фронтов, конструировать эйконал – обобщенное в смысле С.Н. Кружкова[24] решение соответствующего УЧППП. Здесь уместно, говоря о переплетении задач разных теорий, подчеркнуть, что обобщенный эйконал связан с функцией оптимального результата соответствующей задачи управления по быстродействию.

Круг исследователей, занимавшихся и продолжающих заниматься изучением обобщенных решений уравнений в частных производных и их приложениями, обширен. Негладкие решения краевых задач для УЧППП исследовались в работах Н.Н. Кузнецова, С.К. Годунова, С.Л. Соболева, Н.С. Бахвалова, О.А. Олейник, Е. Хопфа, П. Лакса, В. Флеминга и многих других математиков. Существенные результаты по теории динамических игр и смежным вопросам получены отечественными и зарубежными математиками А.В. Кряжимским, Е.Ф. Мищенко, М.С. Никольским, Ю.С. Осиповым, Л.А. Петросяном, Б.Н. Пшеничным, Н.Н. Субботиной, В.Н. Ушаковым, А.Г. Ченцовым, Р.Е. Калманом, Дж. Лейтманом, П.-Л. Лионсом, А. Фридманом и другими авторами. Наряду с упомянутыми

---

[21] *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 339 с.

[22] *Боровских А.В.* Группы эквивалентности уравнений эйконала и классы эквивалентных уравнений // Вестник НГУ. 2006, № 4. С. 3-42.

[23] *Арнольд В.И.* Особенности каустик и волновых фронтов // М.: «Фазис», 1996. 334 с.

[24] *Кружков С.Н.* Обобщенные решения уравнений Гамильтона-Якоби типа эйконала, I.// Матем. сборник. 1975. Т. 98, Вып. 3. С. 450-493.

выше специалистами весомые результаты в рамках теории оптимального управления, теории дифференциальных игр и их приложений получены в работах Э.Г. Альбрехта, Б.И. Ананьева, А.В. Арутюнова, С.М. Асеева, В.И. Благодатских, Ю.И. Бердышева, В.Г. Болтянского, А.С. Братуся, Р.Ф. Габасова, Р.В. Гамкрелидзе, Н.Л. Григоренко, М.И. Гусева, А.Р. Данилина, В.Н. Дыхты, Г.Е. Иванова, М.И. Зеликина, В.И. Зубова, Ф.М. Кирилловой, А.Ф. Клейменова, А.И. Короткого, Е.К. Костоусовой, Ю.С. Ледяева, А.В. Лотова, Н.Ю. Лукоянова, В.И. Максимова, А.А. Меликяна, Б.Ш. Мордуховича, В.С. Пацко, Н.Н. Петрова, Е.С. Половинкина, Б.Т. Поляка, Д.А. Серкова, А.Н. Сесекина, А.С. Стрекаловского, Л.И. Родиной, А.М. Тарасьева, А.А. Толстоногова, Е.Л. Тонкова, В.Е. Третьякова, В.И. Ухоботова, Т.Ф. Филипповой, С.В. Чистякова, А.Ф. Шорикова, Л. Берковица, А. Брайсона, П. Варайя, М.Дж. Крэндалла, В. Лакшмикантама, Хо Ю-Ши.

Процедуры численного построения решений дифференциальных игр и обобщенных решений УГЯ разрабатываются в рамках теории вязкостных решений зарубежными специалистами М. Барди, М. Фальконэ, С. Ошером и П. Суганидисом. Алгоритмы построения на сетках обобщенных решений уравнений гамильтонова типа и уравнений типа эйконала развивает Дж.А. Сифиан (J.A. Sethian) и его коллеги.

Важно отметить, что развитие новых подходов при построении недифференцируемых решений УЧППП, основных разрешающих конструкций теории позиционных дифференциальных игр и оптимального управления идет благодаря концепциям негладкого анализа, восходящим к работам У. Дини, Ф. Кларка, Ж.П. Обэна, Р.Т. Рокафеллара, В.Ф. Демьянова и других специалистов.

Цели и задачи. Целью диссертационной работы является разработка методов и алгоритмов построения негладких решений дифференциальных игр, задач управления, а также задач геометрической оптики.

В диссертации исследуются следующие задачи и проблемы:

I. Построение обобщенного решения краевой задачи Дирихле для УЧППП типа эйконала с постоянным коэффициентом преломления среды в контексте решения задачи управления по быстродействию с целевым множеством сложной геометрии (невыпуклым и допускающим негладкость границы).

II. Построение обобщенного (в минимаксном смысле) решения краевой задачи Коши для УГЯ с положительно однородным по импульсной переменной гамильтонианом в контексте решения позиционной дифференциальной игры сближения-уклонения с терминальной платой.
III. Изучение свойств некоторых классов невыпуклых множеств, разработка методов вычисления меры (коэффициента) невыпуклости для различных классов плоских замкнутых множеств, развитие теории отделимости для некоторых классов невыпуклых множеств, приложение полученных результатов для построения сингулярных множеств решений в задачах управления по быстродействию и задачах геометрической оптики.
IV. Изучение понятия дефекта стабильности на множествах различной геометрии; выделение классов множеств со свойствами, обеспечивающими их использование при построении решений дифференциальных игр и задач управления, рассматриваемых в отличных от строгих классических постановок, допускающих приведение движений динамических систем не точно на цель, а в некоторую окрестность целевого множества.

Методология и методы исследования. В диссертационной работе используются методы теории позиционных дифференциальных игр, развиваемые в научной школе по теории управления Н.Н. Красовского. Используются конструкции теории минимаксных (обобщенных) решений УЧППП А.И. Субботина. Результаты исследования опираются также на методы и конструкции, развитые и развиваемые в рамках теории оптимального управления, теории особенностей гладких отображений. Используются методы и конструкции выпуклого и негладкого анализа, дифференциальной геометрии, а также оригинальные конструкции.

Научная новизна. Все полученные в работе результаты являются новыми.

Основные результаты диссертации. Положения, выносимые на защиту.

1. Выявлены и описаны характерные признаки и особенности замкнутых множеств конечномерного евклидова пространства в терминах скалярной функции, значения которой имеют смысл угловых величин, а супремальное значение выражает степень невыпуклости множества. Осуществлена классификация невыпуклых множеств по признакам регулярности и мажорируемости (в силу введенных определений). Введены в

рассмотрение основные структурные элементы развиваемой теории (биссектриса множества, псевдовершина множества, крайняя точка биссектрисы, обобщенная гиперплоскость). Для некоторых классов невыпуклых множеств сформулированы и доказаны утверждения, аналогичные теоремам из выпуклого анализа о существовании опорной гиперплоскости выпуклого множества и об отделимости выпуклых множеств в евклидовом пространстве.

2. Изучены свойства функции оптимального результата в задаче управления по быстродействию для вектограммы скоростей частного вида. Установлена связь этой функции с обобщенным решением краевой задачи Дирихле для уравнения типа эйконала. С помощью техники исследования, основанной на свойствах локальных диффеоморфизмов, выявлены условия возникновения сингулярности у решения. Развит теоретический аппарат выявления сингулярных множеств для случая невыпуклого краевого множества, имеющего кусочно-гладкую границу. Показано, что структура сингулярного множества определяется геометрией краевого множества и дифференциальными свойствами его границы. Приведены формулы вычисления крайних точек сингулярного множества. Создана совокупность численно-аналитических подходов к построению основных структурных элементов функции оптимального результата – псевдовершин целевого множества, крайних точек сингулярного множества, ветвей сингулярных кривых.

3. Введены в рассмотрение четыре типа производных в силу диффеоморфизмов. Созданы основы соответствующего дифференциального исчисления, которое предназначено, в частности, для описания сингулярностей обобщенных решений УЧППП. Эффективность подхода продемонстрирована на примере построения минимаксного решения краевой задачи Дирихле для уравнения типа эйконала.

4. Для дифференциальной игры сближения-уклонения, рассматриваемой на отрезке времени фиксированной продолжительности, доказана сходимость к функции цены разностных схем, основу которых составляют операторы шага (по времени) максиминного типа, применяемые к регуляризациям посредством локального овыпукления аппроксимаций сужений функции цены в моменты времени. Полученнная оценка сходимости разностных схем согласуется с оценками для разностных операторов, полученных в рамках вязкостного подхода к определенияю

обобщенного решения соответствующего уравнения в частных производных первого порядка.

5. Исследованы теоретические и практические аспекты проблемы привлечения для решения дифференциальных игр множеств, не обладающих ключевым свойством стабильности (слабой инвариантности). С этой целью введено в рассмотрение отображение, базу которого составляют дискриминантные преобразования плоских кривых. Выявлен регуляризующий (сглаживающий) эффект этого отображения, рассматриваемого на одном классе кусочно-гладких поверхностей в трехмерном пространстве. Найдена оценка для дефекта стабильности трехмерного множества, полученного деформацией максимального стабильного моста в дифференциальной игре «в момент» с помощью упомянутого отображения. Оценка для дефекта стабильности зависит квадратичным образом от коэффициента регуляризации и свидетельствует о возможности построения управляющих воздействий за игрока, решающего задачу сближения, гарантирующих приведение движений динамической системы на цель в нестрогом смысле – в некоторую окрестность целевого множества, размер которой поддается оценке через дефект стабильности множества. Теоретические результаты иллюстрируется на примере решения известной нерегулярной игры. Практические аспекты исследования дополняются изложением алгоритмов построения решений дифференциальных игр в классе невыпуклых трехмерных множеств, имеющих гладкие границы сечений по времени с разрывной кривизной.

Теоретическая и практическая значимость работы. Диссертационная работа имеет теоретическую и прикладную направленность. Полученные в ней результаты могут быть использованы для дальнейшего исследования обобщенных решений уравнений в частных производных и уравнений гамильтонова типа. Развиваемые в работе методы приложимы для выявления и построения сингулярных особенностей решений в задачах оптимального управления и дифференциальных играх. Предложенные в работе аппроксимационные операторы позволяют численно конструировать функцию цены для дифференциальной игры сближения-уклонения «в момент». В диссертации предложены реализуемые на практике процедуры приближенного построения разрешающих конструкций в игровых задачах управления, которые базируются на обобщении понятия стабильности. Приведенная в диссертации характеризация невыпуклых замкнутых множеств связана с задачей выявления и построения сингулярных множеств при решении УЧППП и УГЯ, но при этом представляет самостоятельный интерес с точки зрения развития методов исследования множеств средствами негладкого анализа.

Степень достоверности и апробация результатов. Результаты диссертации приведены в виде строгих математических утверждений, а также примеров и иллюстраций, демонстрирующих применение этих утверждений. Все результаты диссертации обоснованы. Их достоверность и непротиворечивость подтверждается применением строгих математических методов исследований, публикацией работ в открытой печати в ведущих рецензируемых изданиях и апробацией результатов диссертации. Результаты докладывались на научных вузовских, академических и специализированных научных площадках России в городах Москва, Санкт-Петербург, Новосибирск, Екатеринбург, Нижний Новгород, Казань, Челябинск, Иркутск, Тамбов, Снежинск, а также на международных семинарах и конгрессах: Международный семинар IFAC "Негладкие и разрывные задачи управления и оптимизации" (Челябинск, 1993 г.); Международный симпозиум 8th International Symposium on Dynamic Games and Applications (July 5-8, 1998, Chateau, Vaalsbroek, Maastricht, The Neterlands); Всероссийская научная конференция «Алгоритмический анализ неустойчивых задач» (Екатеринбург, 2001 г., 2004 г., 2008 г.); Всероссийская конференция «Актуальные проблемы прикладной математики и механики» (Екатеринбург, 2003 г.); Международная конференция "Колмогоровские чтения. Общие проблемы управления и их приложения " (Тамбов, 2009 г., 2011 г., 2013 г., 2015 г.); Международный семинар «Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона-Якоби» (Екатеринбург, 2005 г.); 9 Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механики (Нижний Новгород, 2006 г.); 9-ая Международная Четаевская конференция (Иркутск, 2007 г.); Международная конференция памяти И.Г. Петровского (Москва, 2007 г.); Международная конференция, посвященная 100-летию со дня рождения Л.С. Понтрягина (Москва, 2008 г.); Международная конференция, посвященная 100-летию со дня рождения С.Л. Соболева «Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений» (Новосибирск, 2008 г.); Международный семинар им. Е.С. Пятницкого «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления» (Москва, 2008 г.); Международная конференция «Управление динамическими системами» (Москва, 2009 г.); Всероссийская конференция «Динамические системы. Управление и наномеханика» (Ижевск, 2009 г.); 9 Международная Казанская летняя научная школа-конференция (Казань, 2009 г.); Международная конференция «Актуальные проблемы теории устойчивости и управления» (Екатеринбург, 2009 г.); XI Международная конференция «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления» (Москва, 2010 г.); Международная конференция «Забабахинские научные чтения» (Снежинск, 2010 г., 2012 г.); Всероссийская конференция, посвященная 80-ти летию со дня рождения В.И. Зубова «Устойчивость и процессы управления» (Санкт-Петербург, 2010 г.); 14-ая Всероссийская конференция «Математическое программирование и приложения» (Екатеринбург, 2011 г.); Международная конференция International Conference "Dynamical System Modeling and Stability Investigations" (Department of Complex System Modeling, Faculty Cybernetics, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine, 2011); Международная конференция, посвященная 110-ой годовщине И.Г. Петровского (Москва, 2011 г.); Всемирный конгресс Международной федерации по автоматическому управлению 18th IFAC World Congress (Milan, 2011 г.); Международная конференция по системному моделированию и оптимизации 25th IFIP TC 7 Conference on System Modeling and Optimization (Berlin, 2011 г.); Конференция «Дифференциальные уравнения и оптимальное управление», посвященная 90-летию со дня рождения академика Е.Ф. Мищенко (Москва, 2012 г.); Международная конференция «Конструктивный негладкий анализ и смежные вопросы» (Санкт-Петербург, 2012 г.); Международный семинар 12th Viennese Workshop "Optimal Control, Dynamic Games and Nonlinear Dynamics" (Laxenburg, 2012); Семинар Международной федерации по автоматическому управлению 15th IFAC Workshop on Control Applications of Optimization (Rimini, Italy, 2012); Семинар кафедры математической теории моделирования систем управления факультета прикладной математики — процессов управления СПбГУ, руководитель семинара профессор В.Ф. Демьянов (Санкт-Петербург, 2013 г.); 12-ое Всероссийское совещание по проблемам управления (Москва, 2014 г.); Международная конференция, посвященная 90-летию со дня рождения академика Н.Н. Красовского «Динамика систем и процессы управления» (Екатеринбург, 2014 г.); Всероссийская конференция "Математическое программирование и приложения", посвященная памяти академика И.И. Еремина (Екатеринбург, 2015 г.); II Международный семинар «Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона-Якоби», посвященный 70-летию со дня рождения академика А.И. Субботина (Екатеринбург, 2015 г.);

Семинар кафедры «Математической теории игр и статистических решений» Санкт-Петербургского государственного университета, руководитель семинара профессор Л.А. Петросян (2015 г.); Десятый международный симпозиум IFAC "Нелинейные управляемые системы" (NOLCOS 2016, Monterey, USA, 23-25 August, 2016); Семинар кафедры дифференциальных уравнений Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова, руководитель семинара профессор А.С. Шамаев (2016 г.); Семинар кафедры системного анализа Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова, руководитель семинара академик А.Б. Куржанский (2016 г.); Семинары отдела динамических систем Института математики и механики имени Н.Н. Красовского УрО РАН, руководители семинара чл.-корр. РАН В.Н. Ушаков и профессор А.М. Тарасьев (1997-2017 гг.).

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в работах [1-54]. Статьи [1-37] опубликованы в ведущих рецензируемых научных изданиях: российских из Перечня ВАК [1, 2, 4-6, 8-10, 12-20, 22, 23-25, 35] и приравненных к ним зарубежных [3, 7, 11, 21, 24, 36, 37]. При этом 17 работ [1, 4, 6, 7, 10, 11, 13, 16, 19, 20, 21, 23, 24, 30, 35, 36, 37] включены в международные реферативные базы данных Web of Science и/или Scopus.

Личный вклад. Все основные результаты диссертации получены автором самостоятельно. Из опубликованных в соавторстве работ в диссертацию включены только результаты автора. Автор диссертационной работы предложил разностные операторы для построения функции цены дифференциальной игры с нелинейной динамикой, изучил их свойства, доказал аппроксимативность операторов, некоторые из которых реализовал в виде вычислительных программ [1-7, 38-43, 48, 52, 54]. Разработал методы решения одного класса задач быстродействия со сложной геометрией целевого множества и родственного ему класса задач геометрической оптики на основе введенного им множества симметрии, применив и развив технику анализа, основанную на свойствах локальных диффеоморфизмов [8-17, 21, 25, 28-31, 33, 35, 37, 46, 47, 49, 51, 53], указал приложения в задачах аппроксимации множеств [27, 36]. Изучил теоретические аспекты проблемы привлечения для решения дифференциальных игр множеств, не обладающих ключевым свойством слабой инвариантности, доказав ряд утверждений, имеющих практическую значимость, предложил алгоритмы построения основных конструктивных элементов, разрешающих дифференциальные игры при ослабленных постановках [18-20, 22-24, 26]. Развил новую теорию, направленную на изучение свойств замкнутых множеств в конечномерном евклидовом пространстве, введя новые понятия и доказав теоремы об отделимости для некоторых классов невыпуклых множеств [32, 34, 44, 45].

Исследования рассматриваемых в диссертации задач проводились при поддержке грантов РФФИ № 99-01-00146, 02-01-00769, 05-01-00601, 08-01-00587, 11-01-12088, 11-01-00427_а, 14-01-00486_а, грантов Президента РФ по поддержке ведущих научных школ № НШ-791.2003.1, НШ-8512.2006.1, НШ-2640.2008.1, НШ-64508.2010.1, НШ-5927.2012.1, Федеральной целевой программы фундаментальных исследований РАН «Фундаментальные проблемы в нелинейной динамике», интеграционного проекта Уро РАН и СО РАН «Развитие теории и приложений минимаксных решений уравнений Гамильтона-Якоби и позиционного оптимального управления к задачам динамической реконструкции и законам сохранения», Программы фундаментальных исследований Президиума РАН «Математические задачи современной теории управления» (проект № 0387-2015-0075 «Позиционные дифференциальные игры, уравнения Гамильтона-Якоби и их приложения»), Программы УрО РАН «Современные проблемы алгебры, анализа и теории динамических систем с приложениями к управлению сложными объектами» (проект №15-16-1-13 «Позиционное управление динамическими системами в условиях конфликта и неопределенности»). Работы в рамках указанных программ и проектов осуществлялись автором в кооперации с сотрудниками отдела динамических систем ИММ УрО РАН.

Структура и объем диссертации. Работа состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы. Общий объем диссертации 392 страницы, включая 67 рисунков. Библиография включает 258 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В **Главе 1** рассмотрен класс замкнутых в общем случае невыпуклых множеств в евклидовом пространстве, получивших название α-множеств. Изучение свойств α-множеств представляет интерес для геометрии, а также служит развитию теории и методов негладкого и выпуклого анализа. Осуществлена характеризация α-множеств, заключающаяся в выявлении и описание характерных признаков и особенностей таких множеств. Проведена классификация α-множеств в соответствии с веденным определением регулярного множества. Введены в рассмотрение аналоги базовых понятий из выпуклого анализа и изучены их свойства. Сформулированы и доказаны утверждения в духе таких теорем из выпуклого анализа, как теорема о существовании опорной гиперплоскости к выпуклому множеству и теоремы об отделимости выпуклых множеств в евклидовом пространстве. Полученные результаты теории отделимости невыпуклых множеств распространены на случай подграфиков и надграфиков скалярных функций, удовлетворяющих условию Липшица. В последующих главах работы указаны сферы приложения α-множеств в теории оптимального управления, дифференциальных играх.

В **§ 1.1** приведено определение α-множества. Пусть A – замкнутое множество в евклидовом пространстве R^n и $z^* \in R^n \setminus A$. Под проекцией $\pi(z^*)$ точки z^* на A понимаем ближайшую к z^* точку из A в евклидовой метрике. Полагаем

$\Omega_A(z^*) = \{\pi(z^*)\}$ – множество всех проекций $\pi(z^*)$ точки z^* на A;

$co\Omega_A(z^*)$ – выпуклая оболочка множества $\Omega_A(z^*)$;

$con(co\Omega_A(z^*) - z^*) = \{h = \lambda(s - z^*) : \lambda \geq 0, s \in co\Omega_A(z^*)\}$ – конус в R^n, натянутый на $co\Omega_A(z^*) - z^*$;

$H_A(z^*)$ – множество всевозможных пар (h_*, h^*) ненулевых векторов h_*, h^* из $con\,(co\Omega_A(z^*) - z^*)$;

$\widehat{(h_*, h^*)} = \arccos\dfrac{\langle h_*, h^* \rangle}{\| h_* \| \cdot \| h^* \|} \in [0, \pi]$ – угол между векторами h_* и h^*,

$(h_*, h^*) \in H_A(z^*)$; $\alpha_A(z^*) = \max\limits_{(h_*, h^*) \in H_A(z^*)} \widehat{(h_*, h^*)} \in [0, \pi]$;

$\langle h_*, h^* \rangle$ – скалярное произведение векторов h_* и h^* в R^n, $\| h_* \| = \langle h_*, h_* \rangle^{\frac{1}{2}}$.

Определение 1.1. *Величину*

$$\alpha = a_A = \sup_{z^* \in R^n \setminus A} \alpha_A(z^*) \in [0, \pi]$$

назовем мерой невыпуклости множества A. *Множество* A *назовем* α-*множеством в* R^n.

Показано, что функция $\alpha_A(z)$, $z \in R^n \setminus A$, полунепрерывна сверху.

Лемма 1.2. *Для точки* $z^* \in R^n \setminus A$ *выполнено условие* $z^* \notin co\Omega_A(z^*) \;\Leftrightarrow\; \alpha_A(z^*) = \max\limits_{(h_*, h^*) \in H_A(z^*)} \widehat{(h_*, h^*)} < \pi$.

Введена градация множеств по признаку регулярности.

Определение 1.2. *Замкнутое множество* A *в* R^n *назовем регулярным множеством в* R^n, *если для любой точки* $z^* \in R^n \setminus A$ *выполняется* $z^* \notin co\Omega_A(z^*)$.

Определение 1.3. *Замкнутое множество* A *в* R^n *назовем нерегулярным множеством в* R^n, *если оно не является регулярным множеством, т.е. если* $\alpha_A(z^*) = \pi$ *для некоторой точки* $z^* \in R^n \setminus A$.

В **§ 1.2** изучены плоские множества. Сделан акцент на рассмотрении проблемы мажорируемости α-множеств. С содержательной точки зрения замкнутое множество A в R^2 обладает свойством мажорируемости, если для любой точки $z^* \in \partial A$, ∂A – граница A, замыкание дополнения конуса допустимых направлений в этой точке содержит выпуклый конус с непустой внутренностью, помещенный вершиной в точку $z^* \in \partial A$, такой, что мера невыпуклости замыкания его дополнения не превосходит меру невыпуклости множества A. Приведены примеры мажорируемых множеств.

§ 1.3 целиком посвящен построению примера немажорируемого плоского невыпуклого множества. В основе построений лежит трехзвенная ломаная со специально подобранными свойствами.

Построенный в **§**1.3 и детально разобранный пример немажорируемого множества позволил в **§ 1.4** ввести в рассмотрение понятие биссектрисы $L(A)$ множества A.

Определение 1.5. *Биссектрисой* $L(A)$ *замкнутого множества* $A \subset R^n$ *назовем множество всех точек из его дополнения, которые имеют не менее двух проекций на множество* A *:*

$$L(A) = \{b \in R^n \setminus M : \exists a_1 = \pi_A(b), \exists a_2 = \pi_A(b), a_1 \neq a_2\}. \quad (1)$$

Биссектриса относится к множествам симметрии[25] и является характеристическим множеством для A. Структура (1) как объединения многообразий, определяется геометрией границы множества A. В плоском случае биссектриса в ситуации общего положения является объединением нуль- и одномерных многообразий, построение которых возможно в ряде простых ситуаций в точном аналитическом виде, но в самой общей ситуации требуется разработка численных алгоритмов. Одномерные многообразия

[25] *Брус Дж., Джиблин П.* Кривые и особенности. М.: Мир, 1988. 262 с.

(«ветви биссектрисы»), составляющие $L(A)$, определяются особыми точками границы множества, названными псевдовершинами. В работе приведены строгие определения этих особых точек, а также приведены определения сопутствующих элементов разрешающей конструкции – крайних точек биссектрисы, ветвей биссектрисы. Изложение дано на языке скалярных локальных диффеоморфизмов и в терминах односторонних пределов.

Определение 1.6. *Будем говорить, что локальный диффеоморфизм* $x_2 = x_2(x_1)$ *непрерывен слева в точке* $x_1 = x_0 \in R$, *и отображает левую полуокрестность точки* $x_1 = x_0$ *в ее правую полуокрестность, если выполняются условия:*

1) $x_2\left((x_0-\delta_1, x_0)\right) = (x_0, x_0+\delta_2), \delta_1 > 0, \delta_2 > 0$,

2) $\lim\limits_{x_1 \to x_0 - 0} x_2(x_1) = x_0$.

Определение 1.7. *Точка* $(x_0, y_0) = (x_0, f(x_0))$ *называется псевдовершиной кривой* $\Gamma = gr\, f$, *если существует локальный диффеоморфизм* $x_2 = x_2(x_1)$ *левой полуокрестности точки* $x_1 = x_0$ *в ее правую полуокрестность, определяемый уравнением* $G(x_1, x_2) = 0$.

Здесь

$$G(x_1, x_2) = \rho^2\left((x_1, f(x_1)), (x_*, y_*)\right) - \rho^2\left((x_2, f(x_2)), (x_*, y_*)\right) \quad (2)$$

$\rho(a,b) = \| a-b \|$, $a, b \in R^2$; $\Gamma = gr\, f$ – график скалярной функции $y = f(x)$, рассматриваемой в окрестности точки $x = x_0, y_0 = f(x_0)$; (x_*, y_*) – точка пересечения касательных к $\Gamma = gr\, f$ в точках $(x_1, f(x_1))$ и $(x_2, f(x_2))$, $x_1 < x_2$.

Определение 1.8. *Ветвью* $L(x_0, y_0)$ *биссектрисы кривой* $\Gamma = gr\, f$, *где* $(x_0, y_0) = (x_0, f(x_0))$ – *псевдовершина* $\Gamma = gr\, f$, *будем называть множество точек* (x, y) *на плоскости, удовлетворяющих системе уравнений*

$$\begin{cases} -x + x_1 - f'(x_1)(y - f(x_1)) = 0 \\ -x + x_2 - f'(x_2)(y - f(x_2)) = 0 \end{cases}, \quad (3)$$

$x_2 = x_2(x_1)$ – *непрерывный слева в точке* $x_1 = x_0$ *локальный диффеоморфизм левой полуокрестности точки* $x_1 = x_0$ *в ее правую полуокрестность, определяемый уравнением* $G(x_1, x_2) = 0$.

Система уравнений (3) является сопряженной к системе уравнений, определяющих касательные к $\Gamma = gr\,f$ в точках $\left(x_1, f(x_1)\right)$ и $\left(x_2, f(x_2)\right)$, $x_1 < x_2$.

Определение 1.9. *Конечный односторонний предел* $(\overline{x}_0, \overline{y}_0) = \lim\limits_{x_1 \to x_0 - 0}(x, y)$ *решений системы (3) будем называть крайней точкой биссектрисы. Если означенный предел равен бесконечности или не существует, то будем говорить, что псевдовершина* $(x_0, y_0) = (x_0, f(x_0))$ *не порождает крайнюю точку биссектрисы.*

В **§ 1.5** даны пояснения формального определения биссектрисы плоского множества и сопутствующих биссектрисе элементов конструкций. В качестве иллюстрации предъявлен пример множества, граница которого описывается алгебраической кривой частного вида. Для этого множества аналитическими методами найдены биссектриса и мера невыпуклости α.

В **§ 1.6** приведено обоснование необходимых условий существования псевдовершин для одного класса достаточно гладких кривых. Доказано, что в случае, когда граница плоского множества определяется графиком скалярной достаточно гладкой функции псевдовершина множества является точкой, в которых кривизна стационарна (**Теорема 1.1**).

В **§ 1.7** исследована проблема отделимости множеств в семействе α-множеств, мера невыпуклости которых строго больше нуля. Введены в рассмотрение понятия α-гиперплоскости, опорной α-гиперплоскости, α-полупространства, обобщающие соответствующие понятия выпуклого анализа. Доказана теорема о существовании опорных гиперплоскостей для семейства мажорируемых плоских множеств.

Обозначим через A_α совокупность всех замкнутых множеств A в R^n с числом $\alpha = a_A$. Символом B_α обозначим совокупность всех замкнутых множеств A в R^n с числом $\alpha \le a_A$, $\alpha \in [0, \pi]$.

Теорема 1.2. *Пусть* $A \in A_\alpha$, $\alpha \in [0, \pi]$, *обладает свойством мажорируемости и* $z^* \in \partial A$. *Тогда существует хотя бы одна* α-*гиперплоскость, опорная к* A *в точке* z^*.

Затем сделан упор на изучение в терминах меры невыпуклости множеств, порождаемых скалярными функциями, удовлетворяющими условию Липшица на всей области своего определения. Здесь речь идет о графиках, подграфиках и надграфиках скалярных функций. Показано, что все эти три типа множеств для скалярной функции, определенной на всем пространстве R^n и имеющей константу Липшица L, лежат в семействе α-множеств с мерой невыпуклости, не превосходящей величину $2arctgL$. Доказано, что надграфик $epi\, f$ функции f и подграфик $hypo\, g$ функции g в случае, когда обе функции определены на всем пространстве R^n и удовлетворяют условию Липшица с константой L, а также неравенству $\inf\limits_{x\in R^n}\left(f(x)-g(x)\right)=\gamma>0$, сильно отделены друг от друга, при этом разделяющая их α-гиперплоскость имеет меру невыпуклости, не превосходящую величину $2arctgL$.

Определение 1.13. *Множества А и В из* R^n *сильно* α*-отделимы (соответственно, сильно* B_α*-отделимы), если существует такая* α*-гиперплоскость* Γ *(соответственно, существует гиперплоскость* $\Gamma\in B_\alpha$*) и* $\rho\in(0,+\infty)$ *такие, что* $A_\rho\in\Phi^-$, $B_\rho\in\Phi^+$. *Здесь* Φ^+ *и* Φ^- *– полупространства в* R^n*, соответствующие* α*-гиперплоскости* Γ *(соответственно, гиперплоскости* $\Gamma\in B_\alpha$*).*

Теорема 1.3. *Пусть функции* $f:R^n\to R$ *и* $g:R^n\to R$ *удовлетворяют условию Липшица с одной и той же константой* $L\in(0,+\infty)$ *и* $\inf\limits_{x\in R^n}\left(f(x)-g(x)\right)=\gamma>0$. *Тогда в* R^{n+1} *существует гиперплоскость* $\Gamma^*\in B_\alpha$, $\alpha=2arctg\,L$, *сильно* B_α*-разделяющая множества* $epi\, f$ *и* $hypo\, g$ *в* R^{n+1}.

Далее показано, что если функции $f:M\to R$ и $g:M\to R$ определены на замкнутом множестве $M\subset R^n$ и удовлетворяют условию Липшица с одной и той же константой $L\in(0,+\infty)$, а также условию $\inf\limits_{x\in M}\left(f(x)-g(x)\right)=\gamma>0$, то на продолжения этих функций на все пространство R^n, формируемых по правилам[26]

$$f^*(x)=\inf_{y\in M}\left(f(y)+L\|x-y\|\right), x\in R^n;\quad g^*(x)=\inf_{y\in M}\left(g(y)+L\|x-y\|\right), x\in R^n,$$

переносится результат Теоремы 1.3, т.е. существует гиперплоскость сильно разделяющая множества $epi\, f^*$ и $hypo\, g^*$ в R^{n+1}. Вместе с этим имеет место сильная отделимость $epi\, f$ и $hypo\, g$, при этом мера невыпуклости

[26] *Макаров Б.М., Подкорытов А.Н.* Лекции по вещественному анализу. Издательство: БХВ-Петербург, 2011. 688 с.

гиперплоскости, сильно разделяющей эти множества, не превышает величину $2arctgL$.

Теорема 1.4. *Пусть функции* $f: M \to R$ *и* $g: M \to R$ *удовлетворяют на замкнутом множестве* $M \subset R^n$ *условию Липшица с одной и той же константой* $L \in (0,+\infty)$ *и* $\inf\limits_{x\in M}\big(f(x)-g(x)\big)=\gamma>0$. *Тогда в* R^{n+1} *существует гиперплоскость* $\Gamma^* \in B_\alpha$, $\alpha = 2arctg\,L$, *сильно* B_α*-разделяющая множества* $epi\ f$ *и* $hypo\ g$ *в* R^{n+1}.

Объектом исследования **Главы 2** является краевая задача Дирихле для уравнения в частных производных первого порядка типа эйконала. В теории динамического управления движением уравнение указанного типа изучается при анализе задачи быстродействия. Изложен численно-аналитический метод построения обобщенного (в минимаксном смысле) решения уравнения. Введенные конструкции позволяют в ряде случаев строить минимаксное решение уравнения в явном виде. При этом как аналитические, так и вычислительные процедуры построения решения опираются на понятие биссектрисы, которое введено в предыдущей главе. Биссектриса целевого множества является сингулярным множеством для рассматриваемого класса задач быстродействия. Подробно изучена плоская задача быстродействия с простой динамикой. В этой Главе также введены в рассмотрение многоточечные дифференциальные отношения, позволяющие вскрыть негладкие особенности обобщенных решений, описать и сконструировать сингулярные множества.

В **§ 2.1** приведена краевая задача Дирихле для УГЯ

$$\min_{v:\|v\|\le 1}\langle v, Du(x)\rangle + 1 = 0, \qquad u\big|_{\Gamma} = 0. \qquad (4)$$

Здесь $Du(\mathbf{x}) = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1},\ldots,\dfrac{\partial u}{\partial x_n}\right)$ – градиент функции $u=u(\mathbf{x})$, $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_n)$, $\langle a,b\rangle = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i$ – скалярное произведение векторов $a=(a_1,\ldots,a_n)$ и $b=(b_1,\ldots,b_n)$, $\|a\| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2}$ – норма вектора $a=(a_1,\ldots,a_n)$. Краевое условие определено на границе $\Gamma = \partial M$ замкнутого множества $M \subset \mathbf{R}^n$.

Минимаксное решение $u = u(\mathbf{x})$ задачи (4) является функцией оптимального результата для соответствующей задачи быстродействия с шаровой индикатрисой.

Затем введена в рассмотрение формально другая, но при этом родственная краевая задача Дирихле для уравнения эйконала в случае среды с постоянным коэффициентом преломления

$$\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 = 1, \ u\big|_{\Gamma} = 0 \tag{5}$$

Дифференциальные операторы, задающие УГЯ и уравнение эйконала, практически эквивалентны. В связи с этим обсуждается связь фундаментального (по С.Н. Кружкову) решения $u_K = u_K(\mathbf{x})$ задачи Дирихле для уравнения эйконала с минимаксным решением краевой задачей Дирихле для уравнения УГЯ.

В **§ 2.2** обоснована структура минимаксного решения краевой задачи (4). Пусть $\rho(\mathbf{x}, M)$ – евклидово расстояние до замкнутого множества $M \subset \mathbf{R}^n$.

Теорема 2.1. *Функция* $u(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x}, M)$ *– минимаксное решение краевой задачи Дирихле (4).*

Функция $u(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x}, M)$ не является в общем случае гладкой. Известно, что функция расстояния внутри области своего определения является супердифференцируемой функцией[27]. При этом нарушение гладкости («градиентная катастрофа») функции расстояния происходит на множестве, характеризующем степень невыпуклости краевого множества. Множество, о котором идет речь, в Главе 1 было названо биссектрисой, оно является сингулярным множеством решения как краевой задачи (4), так и задачи (5). Построение биссектрисы краевого множества следует рассматривать как ключевой элемент решения обеих краевых задач.

В дальнейшем подробно изучена задача Дирихле для плоского случая:

$$\min_{v:\|v\|\le 1}\left(v_1\frac{\partial u}{\partial x} + v_2\frac{\partial u}{\partial y}\right) + 1 = 0, \qquad u\big|_{\Gamma} = 0 \tag{6}$$

Здесь краевое множество $M \subset R^2$ является замкнутым множеством, $\mathbf{x} = (x, y) \in R^2$. Его граница $\Gamma = \partial M$ является непрерывной склейкой дважды гладких кривых без точек самопересечения. По мере изложения результатов

---

[27] *Демьянов В.Ф., Васильев Л.В.* Недифференцируемая оптимизация. М.: Наука, 1981. 384 с.

вносятся уточнения на класс рассматриваемых кривых, ограничивающих $M \subset R^2$.

Подчеркивается, что достаточно простая по своей геометрии структура вектограммы скоростей соответствующей задачи управления по быстродействию делает задачу построения функции $u(x,y)=\rho\left(x,y,M\right)$ в некоторой степени модельной задачей. Сложность этой задаче придает допустимая по условию невыпуклость целевого множества. В этом случае даже при достаточно высокой гладкости границы цели у функции оптимального результата (минимаксного решения задачи (6)) возникает сингулярность. В плане конструирования решений здесь помогает выявленная связь обобщенных решений краевых задач, выраженная равенством

$$u(x,y)=-u_K\left(x,y\right),$$

которая свидетельствует о совпадении карт линий уровня обеих функций (функции оптимального результата и эйконала), и позволяет утверждать фактическую эквивалентность решений задачи быстродействия и задачи геометрической оптики. При дальнейшем исследовании это качественное взаимосвязь позволяет при построении обобщенного решения одной задачи, например, краевой задачи Дирихле для УГЯ использовать методы и процедуры геометрической оптики (принцип Гюйгенса, привлечение эквидистант для построения эволюции волновых фронтов, прочее), а также наоборот, при построении эйконала и волновых фронтов использовать экстремальные операции, свойственные конструкциям оптимального управления и дифференциальных игр.

В **§ 2.3** изучены свойства локальных решений (не дифференциального) уравнения (см. (2))

$$G(x_1,x_2)=0\,, \tag{7}$$

связывающего скалярные параметры x_1,x_2 краевой задачи. Означенное уравнение является нелинейным с симметрической левой частью. При этом дифференциальные свойства функции $G=G(x_1,x_2)$ определяются дифференциальными свойствами границы краевого множества, описываемого скалярными функциями. Отыскание решений уравнения необходимо для выявления псевдовершин границы краевого множества – особых точек, которые определяют ветви сингулярного множества. Основной результат параграфа сформулирован в виде **Леммы 2.2**, в которой приведенны условия на локальный диффеоморфизм, определяемый уравнением (7), при наличии которых обратный локальный диффеоморфизм также будет решением этого уравнения, при этом оба локальных диффеоморфизма продолжимы в одну общую точку, образую непрерывную дугу кривой γ_0.

В **§ 2.4** получены необходимые условия трансверсальности ветвей решения уравнения (7), связывающего параметры, в вырожденном случае. Под трансверсальностью здесь понимается некасательное («протыкающее») пересечение кривой γ_0 с прямой I – графиком тождественной функции, которая является тривиальным решением уравнения. В данном ситуации вырожденный случай означает вырождение каустики в точке пересечения ветвей решения уравнения. Здесь проанализирована ситуация, когда неприменимы классические теоремы о существовании и единственности неявно заданной функции. Показано, что если уравнение (7) на семействе дважды дифференцируемых функций $y = f(x)$, когда $f^{//}(x_0) \neq 0$, определяет локальный диффеоморфизм $x_2 = x_2(x_1)$ левой полуокрестности точки $x_1 = x_0$ в ее правую полуокрестность, непрерывный слева в точке $x_1 = x_0$, то он имеет гладкое продолжение в точке $x_1 = x_0$, причем

$$\frac{dx_2}{dx_1}(x_0) = -1.$$

Геометрическое истолкование здесь следующее. Если $(x_0, f(x_0))$ – псевдовершина графика дважды непрерывно дифференцируемой в точке $x = x_0$ функции $y = f(x)$, $f^{//}(x_0) \neq 0$, то кривая γ_0 является гладкой склейкой локального и ему обратного диффеоморфизмов, причем эта кривая ортогональна прямой I.

Надо заметить, что производные (в общем случае, односторонние производные) локальных диффеоморфизмов $x_2 = x_2(x_1)$, определяемых уравнением (7) играют существенную роль в описании сингулярных множеств.

В **§ 2.5** изучен спектр односторонних левых производных локальных диффеоморфизмов $x_2 = x_2(x_1)$. Здесь под спектром понимается множество возможных значений односторонних левых производных локальных диффеоморфизмов $x_2 = x_2(x_1)$. Показано, что спектр совпадает с неположительной частью вещественной прямой. Доказана **Теорема 2.3,** допускающая геометрическую интерпретацию. Если псевдовершина $(x_0, y_0) = (x_0, f(x_0))$ является точкой графика дважды дифференцируемой функции $y = f(x)$, то в плоскости параметров x_1, x_2 рассматриваемой задачи графики исходного диффеоморфизма $x_2 = x_2(x_1)$ и ему обратного диффеоморфизма $x_1 = x_1(x_2)$ склеиваются гладко в точке $(x_1, x_2) = (x_0, x_0)$, образую при этом прямой угол с графиком тождественного решения $x_2 = x_1$ уравнения $G(x_1, x_2) = 0$. Если псевдовершина $(x_0, y_0) = (x_0, f(x_0))$ является точкой графика только один раз дифференцируемой функции $y = f(x)$, то в плоскости параметров x_1, x_2 графики диффеоморфизмов $x_2 = x_2(x_1)$ и $x_1 = x_1(x_2)$ склеиваются под прямым углом. Если же псевдовершина $(x_0, y_0) = (x_0, f(x_0))$ является точкой негладкости графика рассматриваемой функции, то угол склейки графиков диффеоморфизмов $x_2 = x_2(x_1)$ и $x_1 = x_1(x_2)$ определяется величиной $c = -\sqrt{\dfrac{1 + (f_-^{/}(x_0))^2}{1 + (f_+^{/}(x_0))^2}}$, которая есть взятое со знаком минус отношение дифференциалов длин левой и правой дуг графика функции $y = f(x)$, стягивающихся в точку $(x_0, y_0) = (x_0, f(x_0))$.

Теорема 2.3. *Если* $(x_0,y_0)=(x_0,f(x_0))$ – *псевдовершина кривой* $\Gamma=grf$, $f\in F(x_0,y_0)$, $x_2=x_2(x_1)$ – *локальный диффеоморфизм, определяемый уравнением* $G(x_1,x_2)=0$, *причем* $\lim\limits_{x_1\to x_0-0}\dfrac{dx_2}{dx_1}(x_1) = c \le 0$, *то предельное значение производной диффеоморфизма определяется дифференциальными свойствами функции* $y=f(x)$ *так, что*

$$c = \begin{cases} -1, \quad если\ f \in F^{(2)}(x_0, f(x_0)),\ f^{//}(x_0) \neq 0 \\ 0, \quad если\ f \in F^{(1)}(x_0, f(x_0)),\ f_-^{//}(x_0)\ и\ \ f_+^{//}(x_0)\ конечны, f_-^{//}(x_0) \neq 0 \\ -\sqrt{\dfrac{1 + (f_-^{/}(x_0))^2}{1 + (f_+^{/}(x_0))^2}},\ если\ f \in F^{(0)}(x_0, f(x_0)),\ f_+^{/}(x_0) \neq \infty, f_-^{/}(x_0) \neq \infty \end{cases}$$

Здесь $f_-^{/}(x_0)\, и\ f_+^{/}(x_0)$ $(f_-^{//}(x_0)\, и\ f_+^{//}(x_0))$ – односторонние производные первого порядка (второго порядка) слева и справа соответственно функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0 \in R$.

В **§ 2.6** введено понятие псевдопроизводной – обобщения классической производной. Псевдопроизводная $f_{\wedge}^{/}(x_0)=\lim\limits_{x_1\to x_0-0}\dfrac{f(x_2(x_1))-f(x_1)}{x_2(x_1)-x_1}$ – односторонний левый частичный предел дифференциальных отношений, вычисляемых вдоль локального диффеоморфизма $x_2=x_2(x_1)$, определяемого уравнением (7). Псевдопроизводные естественным образом возникают в рассматриваемых конструкциях и используются для описания псевдовершин целевого множества, а также для описания крайних точек ветвей сингулярного множества.

Псевдопроизводная совпадает с классической производной на множестве дифференцируемых функций. Важно для изучаемых задач, что она определена в точке излома $x=x_0$ кусочно-гладкой функции, причем

$$f_{\wedge}^{/}(x_0)=f_{+}^{/}(x_0)\frac{c}{c-1}-f_{-}^{/}(x_0)\frac{1}{c-1},$$

где $c=-\sqrt{\dfrac{1+(f_{-}^{/}(x_0))^2}{1+(f_{+}^{/}(x_0))^2}}$, $\dfrac{c}{c-1}\geq 0, \dfrac{-1}{c-1}\geq 0, \dfrac{c}{c-1}-\dfrac{1}{c-1}=1$.

Таким образом, в негладком случае псевдопроизводная является выпуклой комбинацией односторонних производных, коэффициенты которой определяются через предельное значение производной локального диффеоморфизма.

Для частных случаев установлена связь псевдопроизводной с симметрической производной Шварца[28], которая используется, в частности, при исследовании рядов Фурье с целью осреднения производных в окрестности точки.

В **§ 2.7** приведено обоснование формул исчисления крайних точек ветвей сингулярного множества. Рассмотрены три различных по своим дифференциальным свойствам случая границы множества.

Показано, что если $A_0=(x_0,f(x_0))$ – псевдовершина дважды гладкой кривой $\Gamma=gr\,f$, $f^{//}(x_0)\neq 0$, то крайняя точка $\overline{A}=(\overline{x}_0,\overline{y}_0)$ сингулярного множества $L(\Gamma)$ является центром кривизны кривой $\Gamma=gr\,f$ в точке $A_0=(x_0,f(x_0))$ (**Лемма 2.3**).

[28] *Натансон И.П.* Теория функций вещественной переменной. Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1974. 480 с.

Если $A_0=(x_0,f(x_0))$ – псевдовершина кривой $\Gamma = gr\,f$, в которой существуют производная первого порядка, односторонние производные второго порядка, не равные друг другу, конечный или бесконечный $\lim\limits_{x\to x_0-0}\dfrac{dx_2}{dx_1}=c\le 0$, то крайняя точка $\overline{A}=(\overline{x}_0,\overline{y}_0)$ биссектрисы $L(\Gamma)$ вычисляется по формулам:

$$\overline{x}_0 = x_0 - \frac{f^{/}(x_0)(1+(f^{/}(x_0))^2)}{\beta_{10}f_-^{//}(x_0)+\beta_{20}f_+^{//}(x_0)}, \overline{y}_0 = f(x_0) + \frac{1+(f^{/}(x_0))^2}{\beta_{10}f_-^{//}(x_0)+\beta_{20}f_+^{//}(x_0)},$$

где $\beta_{10}=\dfrac{1}{1-c}\ge 0$, $\beta_{20}=-\dfrac{c}{1-c}\ge 0$, $\beta_{10}+\beta_{20}=1$ (**Лемма 2.4**). Таким образом, получены соотношения, обобщающие формулы для центра кривизны на случай дифференцируемости с порядком ниже второго.

Наконец, если $A_0=(x_0,f(x_0))$ – псевдовершина кривой $\Gamma = gr\,f$, причем $f_-^{/}(x_0)\ne f_+^{/}(x_0)$, то крайняя точка $\overline{A}=(\overline{x}_0,\overline{y}_0)$ биссектрисы $L(\Gamma)$ совпадает с псевдовершиной графика – $(\overline{x}_0,\overline{y}_0)=(x_0,f(x_0))$ (**Лемма 2.5**).

Кроме того, приведены условия, при которых наличие псевдовершины краевого множества не влечет существования ветви биссектрисы (**Лемма 2.6**).

В **§ 2.8** предметом изучения выступают псевдовершины краевого множества задачи Дирихле для случая, когда граница краевого (вообще говоря, невыпуклого) множества описывается параметрически, при этом координатные функции являются достаточно гладкими. Приведены необходимые условия существования псевдовершин. Условия выписаны в терминах стационарности кривизны и стационарности координатных функций, задающих границу множества.

Здесь переформулированы определения основных элементов математической модели (псевдовершина целевого множества, ветвь биссектрисы, крайняя точка ветви биссектрисы) на случай параметрически заданного скалярного отображения. Обоснована **Лемма 2.7,** выражающая корректность предельного перехода в определении псевдовершины. Под корректностью здесь понимается выполнение двух условий. Во-первых, заявленный в определении псевдовершины предел $(x_0,y_0)\triangleq\lim\limits_{t_1\to t_0-0}(x_*,y_*)$ существует и конечен, во-вторых, он принадлежит кривой.

Получены необходимые условия второго (по производной) порядка, которые являются вырожденными (**Лемма 2.8**). Вырожденность необходимых условий второго порядка, имеющих форму равенства, не следует рассматривать как сугубо отрицательный результат. С формальной точки зрения это равенство свидетельствует о наличии кратных корней уравнения (7). Эти условия являются «отправной точкой» для формирования необходимых условий второго порядка на классах кривых, имеющих «пониженную» гладкость.

Проблема кратности корней уравнения преодолевается в классе кривых, имеющих производные не ниже третьего порядка. Основной результат параграфа оформлен в виде **Теоремы 2.4** и выражает необходимые условия третьего порядка существования псевдовершины границы краевого множества. Результат получен с помощью аппроксимативной техники струй[29] и связан необходимостью решения многопараметрического уравнения, близкого по форме к уравнению гармонической пропорции (золотого сечения)[30].

Пусть $\gamma : T \to R^2$ – отображение числового интервала $T = (\hat{t}, \breve{t})$, $-\infty \le \hat{t} < \breve{t} \le +\infty$ на плоскость. На кривую Γ=$\gamma(T)$ накладываются два условия:

(B1) $\quad \gamma'(t) \ne (0,0), t \in T$

(B2) $\quad \det(\gamma'(t), \gamma''(t)) \ne 0, t \in T$

Здесь det обозначает детерминант матрицы, векторные аргументы которой записаны по строкам.

Теорема 2.4. (*Необходимые условия третьего порядка). Если* $\gamma(t_0) = (x_0, y_0)$ – *псевдовершина трижды дифференцируемой плоской кривой* $\Gamma = \gamma(T)$, *в точке* $t = t_0$ *выполняются условия **(B1) - (B2)**, то с необходимостью в указанной точке выполняется хотя бы одно из равенств:*

$$\gamma_2'\left(\det(\gamma', \gamma''')\left\|\gamma'\right\|^2 - 3\det(\gamma', \gamma'') \cdot \left\langle \gamma', \gamma'' \right\rangle\right) = 0,$$

$$\gamma_1'\left(\det(\gamma', \gamma''')\left\|\gamma'\right\|^2 - 3\det(\gamma', \gamma'') \cdot \left\langle \gamma', \gamma'' \right\rangle\right) = 0.$$

В **§ 2.9** предметом изучения вновь выступают псевдовершины краевого множества задачи Дирихле для случая, когда граница множества

[29] *Постон Т., Стюарт И.* Теория катастроф и ее приложения. М.: Мир, 1980. 607 с.
[30] *Ohm Martin.* Lehrbuch der gesamten höhern Mathematik. Bd 2. Verlag Friedrich Volckmar, Leipzig. 1835.

описывается параметрически и при этом имеет переменную гладкость. Здесь проанализирован случай, когда координатные функции кривой, описывающей границу краевого множества, имеют разрывы первого рода по производной второго порядка. В условиях разрыва кривизны границы краевого множества псевдовершины содержатся во множестве, объединяющем точки двух совокупностей. Первую совокупность составляют точки, у которых ровно одна координата стационарна. Вторую совокупность составляют точки, у которых односторонняя кривизна вычисляется с помощью соответствующего одностороннего предела на множестве локальных диффеоморфизмов со специальными свойствами **(Теоремы 2.5.)**.

В **§ 2.10** представлены основы инструментария, создаваемого с целью выявления сингулярностей обобщенных решений краевых задач для УЧППП и УГЯ. Введены в обращение обобщения классической производной, которые представляют собой пределы дифференциальных отношений, построенных не на двух, а на большем числе точек, стесненных дифференциальной связью. Такие конструкции естественным образом возникают при анализе задач управления и игр, которым свойственна множественность управляемых движений, исходящих из фиксированной точки.

Выделены четыре типа локальных диффеоморфизмов – левые h_-, правые h_+, симметрические левые h_{-+} и симметрические правые h_{+-}. Изучены их свойства. Эти совокупности являются «бедными» с точки зрения алгебры. Они, например, не образуют группы преобразований Ли относительно суперпозиции. Однако именно с их помощью удается вскрывать негладкие особенности решений задач быстродействия. Последний тезис пояснен на примере.

Каждый класс локальных диффеоморфизмов порождает соответствующий тип производных в силу диффеоморфизмов. Введены определения левой производной в силу диффеоморфизма $D_{h_-} f(t_0)$, правой производной в силу диффеоморфизма $D_{h_+} f(t_0)$, симметрической левой производной в силу диффеоморфизма $D_{h_{-+}} f(t_0)$ и симметрической правой производной в силу диффеоморфизма $D_{h_{+-}} f(t_0)$, $t_0 \in R$. Одна из особенностей приведенных определений состоит в том, что знаменатели дифференциальных отношений не обязательно являются линейными функциями относительно аргумента. В дифференциальное отношение закладывается сравнение приращения функции вдоль диффеоморфизма к приращению этого диффеоморфизма.

Для некоторых классов функций установлены формулы дифференцирования согласно введенным определениям. К ним относятся дифференцируемые функции, выпуклые функции, вогнутые функции, функции, меняющие характер выпуклости с выпуклого на вогнутый или с вогнутого на выпуклый, четные функции (**Теорема 2.5**).

§ 2.11 содержит примеры, иллюстрирующие возможности и эффективность разработанного метода. Здесь приведены примеры построения минимаксных решений задачи Дирихле для уравнений гамильтонова типа в аналитической и аппроксимационной форме.

В **Главе 3** рассмотрена краевая задача Коши для УГЯ:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+H\left(t,x,\nabla\varphi\right)=0,\ \varphi(\vartheta,x)=\sigma(x) \tag{8}$$

Изложена процедура приближенного построения минимаксного решения задачи (8) с помощью разностных операторов. При формировании разностных операторов существенным образом эксплуатируются две идеи, корни которых «произрастают» из теории позиционных дифференциальных игр:

1. унификация дифференциальных игр, предложенная Н.Н. Красовским, которая смыкает формализацию позиционных дифференциальных игр с гамильтоновым формализмом и позволяет перейти к определениям обобщённых решений УГЯ не обязательно в терминах управляющих воздействий;
2. регуляризация скалярных функций посредством локального овыпукления, предложенная В.Н. Ушаковым[31] для решения игровых задач управления, которая позволяет искать аппроксимации решений с помощью методов и конструкций выпуклого анализа.

Предложенные разностные операторы ориентированы на численные решения уравнений УГЯ, построение функции оптимального результата для дифференциальных игр и задач оптимального управления.

В **§ 3.1** приведена постановка краевой задачи (8), изложены основные понятия, определения и формулировки.

[31] *Ушаков В.Н.* К теории миримаксных дифференциальных игр // АН СССР. УНЦ. ИММ. Свердловск. 1980. Ч.1. 187 С. ДЕП. В ВИНИТИ 16.19.80, № 4425-80.

Рассмотрен случай, когда гамильтониан $H = H(t,x,l)$ непрерывен по совокупности переменных, удовлетворяет условиям типа Липшица по фазовой переменной $x \in R^n$, по сопряженной переменной $l \in R^n$, а также положительно однороден по сопряженной переменной:

(H1) $H(t,x,\alpha l) = \alpha H(t,x,l)$ для любого числа $\alpha \geq 0$, любых $l \in R^n$ и $(t,x) \in [0,\vartheta] \times R^n$.

(H2) Для любого $l \in R^n$ функция $(t,x) \to H(t,x,l)$ непрерывна на множестве $[0,\vartheta] \times R^n$

(H3) На любом ограниченном множестве $X \subset R^n$ функция $x \to H(t,x,l)$ удовлетворяет условию Липшица, т. е. найдется константа $\lambda_H = \lambda_H(X)$ такая, что для всех $x \in X$, $y \in X$ и $l \in R^n$ выполняется неравенство

$$|H(t,x,l) - H(t,y,l)| \leq \lambda_H \|x - y\|$$

(H4) Функция $l \to H(t,x,l)$ удовлетворяет условию типа условия Липшица, а именно,

$$\sup\left(\left|H(t,x,l) - H(t,y,l^*)\right| - K(t,x)\left\|l - l^*\right\|\right) \leq 0, l \in B_n, l^* \in B_n,$$

Здесь $B_n = \{b \in R^n : \|b\| \leq 1\}$ – шар единичного радиуса с центром в начале координат пространства R^n, $(t,x) \to K(t,x)$ – непрерывная функция, удовлетворяющая условию подлинейного роста

$$K(t,x) \leq \aleph(1 + \|x\|),\ \aleph \text{ – постоянная.}$$

Также предполагается, что краевая функция $\sigma = \sigma(x)$ удовлетворяет локально условию Липшица.

Далее реализованы унификационные конструкции. Для этого введены в рассмотрение две бесконечные совокупности семейств многозначных отображений, отвечающих значениям параметра $\alpha \geq 0$:

$$\{(t,x) \to F_1^\alpha(t,x,l) : l \in R^{n+1}\},\ (t,x) \in [0,\vartheta] \times R^n,$$

и параметра $\beta \geq 0$:

$$\left\{(t,x)\to F_2^{\beta}(t,x,l):l\in R^{n+1}\right\},\ (t,x)\in[0,\vartheta]\times R^n.$$

Значения этих отображений представляют собой сегменты цилиндрических множеств, определяемые гамильтонианом:

$$F_1^{\alpha}(t,x,l)=\left\{\overline{f}\in F_1^{\alpha}(t,x):\langle l,f\rangle\geq H(t,x,pr\,l)\right\},$$

где $pr\,l=(l_1,\ldots,l_n)$, когда $l=(l_1,\ldots,l_{n+1})$, $F_1^{\alpha}(t,x)$ – цилиндр в R^{n+1} .

В расширенном пространстве R^{n+1} сформированы семейства (по α) характеристических дифференциальных включений

$$\dot{z}(t)=(\dot{x}(t),\dot{\chi}(t))\in F_1^{\alpha}(t,x,l),\ \alpha\geq 0$$

а также семейство (по β) характеристических дифференциальных включений

$$\dot{z}(t)=(\dot{x}(t),\dot{\xi}(t))\in F_2^{\beta}(t,x,l),\ \beta\geq 0$$

Использован как факт теории минимаксных решений уравнений гамильтонова типа, что надграфик минимаксного решения краевой задачи Коши (8) слабо инвариантен относительно семейства соответствующих дифференциальных включений при любом значении параметра $\alpha\geq 0$. Соответственно подграфик минимаксного решения слабо инвариантен относительно семейства соответствующих (характеристических) дифференциальных включений при любом значении параметра $\beta\geq 0$.

Отмеченные свойства в дальнейшем позволяют определять (и строить) решение краевой задачи (8) как поточечный infinum по последней компоненте (по χ) движений соответствующих дифференциальных включений или как поточечный supremum по последней (по ξ) компоненте движений соответствующих дифференциальных включений.

В **§ 3.2** определены разностные конструкции, отвечающие разбиению $\Gamma=\{t_0,t_1,...,t_N=\vartheta\}$ временного отрезка $[0,\vartheta]$, и приведены их свойства.

Построение аппроксимаций решения краевой задачи (8) осуществлено не на всем пространстве позиций $(t,x)\in[0,\vartheta]\times R^n$, а на некотором его подмножестве – сильно инвариантном множестве $D^*\subset[0,\vartheta]\times R^n$ относительно дифференциального включения с постоянной шарообразной правой частью.

Рассмотрены операторы шага $G_1^{\alpha}\left[t_i,t_{i+1},\varphi\right](x)$, $\alpha \ge 0$ и $G_2^{\beta}\left[t_i,t_{i+1},\cdot\right]$: $\beta \ge 0$ – разностные операторы, действующие на одном шаге разбиения Γ отрезка $\left[0,\vartheta\right]$:

$$G_1^{\alpha}\left[t_i,t_{i+1},\varphi\right](x) = \inf\left\{\chi : \left(x,\chi\right) \in \tilde{\pi}_1^{\alpha}(t_i,t_{i+1},epi\ \varphi\right\},$$

$$G_2^{\beta}\left[t_i,t_{i+1},\varphi\right](x) = \sup\left\{\xi : \left(x,\xi\right) \in \tilde{\pi}_2^{\beta}(t_i,t_{i+1},hypo\ \varphi\right\}.$$

Здесь функция φ удовлетворяет условию Липшица и определена на временном слое $D^*(t_{i+1})$, точка $x \in D^*(t_i)$, моменты времени $t_i \in \Gamma$ и $t_{i+1} \in \Gamma$, отображение

$\tilde{\pi}_1^{\alpha}(t_i,t_{i+1},epi\ \varphi) = \left\{z = (x,\chi) \in R^{n+1} : epi\ \varphi \bigcap \tilde{Z}_1^{\alpha}(t_{i+1};t_{i,},z,l) \ne \varnothing \text{ для всех } l \in S_{n+1}\right\}$,

где $\tilde{Z}_1^{\alpha}(t_{i+1};t_{i,},z,l) = z + (t_{i+1}-t_i)F_1^{\alpha}(t_{i,},x,l)$ – область достижимости дифференциального включения

$$\dot{z}(t) = (\dot{x}(t),\dot{\chi}(t)) \in F_1^{\alpha}\left(t_i,x,l\right), t \in \left(t_i,t_{i+1}\right],$$

с фиксированной правой частью и начальным условием $z(t_i) = (x,\chi) \in R^n \times R$, соответственно отображение

$\tilde{\pi}_2^{\beta}(t_i,t_{i+1},hypo\ \varphi) = \left\{z = (x,\xi) \in R^{n+1} : hypo\ \varphi \bigcap \tilde{Z}_2^{\beta}(t_{i+1};t_{i,},z,l) \ne \varnothing \text{ для всех } l \in S_{n+1}\right\}$,

где $\tilde{Z}_2^{\beta}(t_{i+1};t_{i,},z,l) = z + (t_{i+1}-t_i)F_2^{\beta}(t_{i,},x,l)$ – область достижимости дифференциального включения

$$\dot{z}(t) = (\dot{x}(t),\dot{\xi}(t)) \in F_2^{\beta}\left(t_i,x,l\right), t \in \left(t_i,t_{i+1}\right],$$

с фиксированной правой частью и начальным условием $z(t_i) = (x,\xi) \in R^n \times R$.

В **§ 3.3** изложены основные свойства операторов шага G_1^{α} и G_2^{β}. Важно, что при достаточно больших значениях параметров $\alpha \ge 0$ и $\beta \ge 0$, больших порогового значения $\alpha_0 = \beta_0 > 0$, связывающего константу Липшица функции φ на множестве $D^*(t+\Delta), \Delta > 0$, и оценку сверху $K > 0$ нормы правой части динамической системы, отвечающие им операторы шага совпадают:

$$G_1^{\alpha}\left[t,t+\Delta,\varphi\right](x) = G_1^{0}\left[t,t+\Delta,\varphi\right](x),\ x \in D^*(t),$$

$$G_2^{\beta}\left[t,t+\Delta,\varphi\right](x) = G_2^{0}\left[t,t+\Delta,\varphi\right](x),\ x \in D^*(t).$$

При этом справедливы следующие представления

$$G_2^{\beta}\left[t,t+\Delta,\varphi\right](x)=\min_{s\in S_n}\max_{f\in F_2(t,x,s)}\operatorname{conc}\varphi(\,x+\Delta f\,)\equiv$$
$$\equiv \operatorname*{mim}_{y\in O(x,K_0\Delta)}\min_{s\in\partial\operatorname{conc}\varphi(y)}\left\{\Delta H(t,x,s)+<s,x-y>+\operatorname{conc}\varphi(y)\right\},\alpha>\alpha_0$$

$$G_1^{\alpha}\left[t,t+\Delta,\varphi\right](x)=\max_{s\in S_n}\min_{f\in F_1(t,x,s)}\operatorname{co}\varphi(\,x+\Delta f\,)\equiv$$
$$\equiv \max_{y\in O(x,K_0\Delta)}\max_{s\in\partial\operatorname{co}\varphi(y)}\left\{\Delta H(t,x,s)+<s,x-y>+\operatorname{co}\varphi(y)\right\},\ \beta>\beta_0,$$

где $\partial co\,\varphi(y)$ – субдифференциал локально-выпуклой оболочки сужения $\varphi_{O(x,K\Delta)}(\cdot)$ функции φ на окрестность $O(x,K_0\Delta)$ точки x радиуса $K_0\Delta$, $K_0=K/2$, вычисленный в точке $y\in O(x,K_0\Delta)$, соответственно, $\partial conc\,\varphi(y)$ – супердифференциал локально-выпуклой оболочки функции $\varphi_{O(x,K\Delta)}(\cdot)$, вычисленный в точке $y\in O(x,K_0\Delta)$. Тем самым осуществляется переход от теоретико-множественного описания оператора шага к аналитическому формату представления.

На разбиении $\Gamma=\{t_0,t_1,...,t_N=\vartheta\}$ мелкости $\Delta(\Gamma)=\max\{\Delta_1,...,\Delta_N\}$, $\Delta_i=t_{i+1}-t_i, i=1,\ldots,N$, определены функции $\varphi_1^{\alpha}(\cdot):\bigcup_{i=0}^{N}\left\{t_i,D^*(t_i)\right\}\to R$, здесь, как и раньше, параметр $\alpha\ge 0$, и функции $\varphi_2^{\beta}(\cdot):\bigcup_{i=0}^{N}\left\{t_i,D^*(t_i)\right\}\to R$, где параметр $\beta\ge 0$, по следующим рекуррентным формулам:

$$\varphi_1^{\alpha}(t_N,x)=\sigma(x),\ x\in D^*(\vartheta),$$
$$\varphi_1^{\alpha}(t_{i-1},x)=G_1^{\alpha}\left[t_{i-1},t_i,\varphi_1^{\alpha}(t_i,\cdot)\right](x),\ x\in D^*(t_i),\ i=1,\ldots,N,$$

и соответственно

$$\varphi_2^{\beta}(t_N,x)=\sigma(x),\ x\in D^*(\vartheta),$$
$$\varphi_2^{\beta}(t_{i-1},x)=G_2^{\beta}\left[t_{i-1},t_i,\varphi_2^{\beta}(t_i,\cdot)\right](x),\ x\in D^*(t_i),\ i=1,\ldots,N.$$

Если краевая функция $\sigma=\sigma(x)$ удовлетворяет на множестве $D^*(\vartheta)$ условию Липшица, то при любых значениях параметра $\alpha\ge\alpha_{00}$, где α_{00} – пороговое значение, определяемое параметрами краевой задачи, им отвечающие функции равны между собой и вычисляются по формулам

$$\varphi_1^{\alpha}(t_{i-1},x)=\varphi_1(t_{i-1},x)\triangleq G_1\left[t_{i-1},t_i,\varphi_1(t_i,\cdot)\right](x),\ \alpha\ge\alpha_{00}.$$

Аналогично, при любых значениях параметра $\beta\ge\beta_{00}=\alpha_{00}$, отвечающие этим значениям функции равны между собой и вычисляются по формулам

$$\varphi_2^{\beta}(t_{i-1},x)=\varphi_2(t_{i-1},x)\triangleq G_2\left[t_{i-1},t_i,\varphi_2(t_i,\cdot)\right](x).$$

Основной результат Главы оформлен в виде теоремы.

ТЕОРЕМА 3.1. *Пусть в задаче Коши (8) сужение краевой функции* $\sigma(\cdot):D^*(\vartheta)\to R$ *удовлетворяет условию Липшица с константой* λ_σ, *гамильтониан* $H(\cdot):D^*\times R^n\to R$ *удовлетворяет условиям (H1)-(H4). Тогда существуют константы* $C_1>0$ *и* $C_2>0$ *такие, что при любом разбиении* $\Gamma=\{t_0,t_1,...,t_N=\vartheta\}$ *отрезка* $[t_0,\vartheta]$, *мелкость* $\Delta(\Gamma)=\max\{\Delta_1,...,\Delta_N\}$ *которого достаточно мала, для любой точки* $(t_i,x),x\in D^*(t_i)$, *имеет место следующая оценка*

$$\left|\varphi_j(t_i,x)-\varphi(t_i,x)\right|\le C_1\Delta^{1/2}+C_2\omega\big((1+K)\Delta\big),\ j=1,2.$$

Здесь $\omega(\cdot):R\to R$ - модуль равностепенной непрерывности многозначного отображения, значениями которого (в виде сегментов шара, отсекаемыми гиперплоскостями, порожденными гамильтонианом) выступают правые части системы характеристических включений.

Заключительные два параграфа Главы 3 посвящены обоснованию теоремы. При этом в **§ 3.4.** приводятся односторонние оценки (**Лемма 3.2.):**

$$\varphi(t_i,x)\ge\varphi_1(t_i,x)-\lambda_\varphi(\vartheta-t_0)\omega\big(\varDelta(1+K)\big),$$

$$\varphi(t_i,x)\le\varphi_2(t_i,x)+\lambda_\varphi(\vartheta-t_0)\omega\big(\varDelta(1+K)\big),$$

здесь $\Gamma=\{t_0,t_1,...,t_N=\vartheta\}$ – разбиение отрезка $[t_0,\vartheta]$, λ_φ – константа. В **§ 3.5.** обосновывается рассогласование результатов разностных операторов (**Лемма 3.3.):**

$$0\le\varphi_2(t_i,x)-\varphi_1(t_i,x)\le C_1\sqrt{\Delta},$$

где $i\in\overline{0,\ldots,N-1}$, $x\in D^*(t_i)$, C_1 – константа.

Приведенные оценки доказывают Теорему 3.1. Полученный результат согласуется с результатами работы[32], в которой в рамках вязкостного

[32] *Souganidis P.E.* Approximation Schemes for Viscosity Solutions of Hamilton–Jacobi Equations // J. Differen. Equat. 1985. Vol. 59. P. 1–43.

подхода к определению обобщенного решения рассматриваемой краевой задачи и при несколько иных предположениях на гамильтониан были указаны условия на разностные операторы, обеспечивающие скорость сходимости к обобщенному решению порядка $\sqrt{\Delta}$. Вопросы сходимости операторов минимаксного типа на основе указанной работы П.Е. Суганидиса были рассмотрены также в работе[33].

В **Главе 4** исследовано понятие дефекта стабильности множеств. Изучен вопрос о привлечении множеств, не обладающих свойством стабильности, для построения разрешающих конструкций при решении дифференциальных игр, рассматриваемых в ослабленных постановках.

Множества с ненулевым дефектом стабильности не гарантируют классически строгое для позиционных игровых постановок решение, какое обеспечивает, например, максимальный стабильный мост. Тем не менее их привлечение для построения решения игры оправданно ввиду наличия теоретически обоснованной оценкой промаха движений конфликтно-управляемой системы, формируемых позиционной стратегией первого игрока при любых допустимых управляющих воздействиях второго игрока. Эта оценка зависит от дефекта множества и определяет размер окрестности цели, в которую гарантировано попадает движение системы[34].

В **§ 4.1** приведена постановка дифференциальной игры, динамика которой на отрезке времени $[t_0,\vartheta]$, $t_0<\vartheta<+\infty$, описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x,u,v)\,,\quad u\in P\,,\quad v\in Q \tag{9}$$

Здесь x – m-мерный фазовый вектор системы, u – управление первого игрока, v – управление второго игрока, P и Q – компакты в евклидовых пространствах R^p и R^q соответственно. Предполагается, что выполнены условия, стандартные для теории позиционных дифференциальных игр, обеспечивающие существование и единственность решения дифференциального уравнения с начальными условиями $x[t_0]=x^{(0)}\in R^m$.

Содержательно сформулированы задача о сближении и задача об уклонении, которые составляют позиционную дифференциальную игру «в

33 *Тарасьев А.М.* Аппроксимационные схемы построения минимаксных решений уравнений Гамильтона–Якоби // Прикладная математика и механика. 1994. Т. 58, Вып. 2. С. 22–36.
34 *Ушаков В.Н., Успенский А.А.* К свойству стабильности в дифференциальных играх // Доклады Академии наук. 2012. Т. 443, №5. С. 549-554.

момент». Строгая постановка задачи о сближении требует отыскания максимального стабильного моста $W^{(0)} \subset [t_0, \vartheta] \times R^m$ – множества уровня краевой задачи Коши для соответствующего УГЯ. В общем случае построение множества $W^{(0)}$ является алгоритмически и ресурсно затратной задачей, ибо ему свойственны невыпуклость и негладкость границы. Поэтому возникает естественный вопрос о применимости для решения дифференциальной игры множеств, отличных от стабильных мостов, но обладающих при этом более приемлемыми свойствами такими, например, как гладкость границы. Этому вопросу сопутствует другой – о том, какая ошибка в решение игры привносится при использовании множества, не совпадающего с $W^{(0)}$.

В этой главе изложены результаты, отчасти отвечающие на эти вопросы. В параграфе 4.1 предъявлен план последующей работы, проанонсирована процедура сглаживания по части переменных трехмерного множества с кусочно-гладкой границей. Указанная процедура сглаживания (регуляризации) осуществляется с помощью дискриминантных преобразований. В результате формируется новое множество W такое, что $W^{(0)} \subset W$. При этом $W^{(0)}$ отклоняется в хаусдорфовой метрике от W на изначально определенную величину $\rho > 0$, где ρ – параметр регуляризации (сглаживания). Естественно, что в общем случае W теряет свойство стабильности.

В **§ 4.2** изучены свойства огибающих частного вида, порожденных семействами окружностей. Для этого примен один из подходов теории особенностей дифференцируемых отображений, основанный на понятии дискриминанта множества. Для простоты изложения результатов вместо кривых общего вида рассматрены графики скалярных функций. Изучены свойства нижних и верхних огибающих дискриминанта в зависимости от дифференциальных свойств рассматриваемой кривой. Приводятся формулы для производных функций, задающих эти огибающие (**Леммы 4.1.– 4.5.**). В частности, показывается, что производная второго порядка огибающей связана с кривизной исходной кривой и параметром регуляризации.

В § **4.3** результаты, полученные в предыдущем параграфе, распространены на случай кусочно-гладких кривых.

Рассмотрено параметрически заданное отображение $R^2 \xrightarrow{\Phi_\Lambda} R^3$:

$$\begin{cases} t = t \\ x_1 = a(\tau, t) \\ x_2 = b(\tau, t) \end{cases}$$

С точки зрения геометрии в случае гладкости вектор-функции $x = r(\tau, t)$, $\tau \in [\tau_1, \tau_2] \subset R$, $t \in [t_0, \vartheta] \in R$, и невырожденности якобиана морфизма $(\tau, t) \to r(\tau, t)$ образом отображения является замкнутая поверхность $\Lambda \subset R^3$. Здесь скаляр $t \in [t_0, \vartheta]$ трактуется как время. Скаляр τ – параметр, посредством которого описывается сечение поверхности Λ в каждый момент времени $t \in [t_0, \vartheta]$.

Фиксируется момент времени $t \in [t_0, \vartheta] \subset R$, выделяется кривая $\Gamma_t = \{x \in R^2 : x = r(\tau, t), \tau \in [\tau_1, \tau_2]\}$. Формируется семейство окружностей радиуса $\rho > 0$ с центрами на Γ_t. По рецептам, изложенным в предыдущем параграфе, конструируются нижняя и верхняя дискриминантные огибающие $\Gamma_t^{\rho,>}$ и $\Gamma_t^{\rho,<}$. При этом на параметр $\rho > 0$ накладывается ограничение, выраженное в терминах кривизны кривой, которое обеспечивает отсутствие эффекта «ласточкиного хвоста». Затем ослабляются требования дифференцируемости, налагаемые на вектор-функцию $r(\tau, t) = (a(\tau, t), b(\tau, t))$, и описывается процедура построения соответствующей кривой $\Gamma_t^{\rho,>}$. Кривая $\Gamma_t^{\rho,>}$ является либо дискриминантной кривой, либо кривой, «собранной» из конечного числа дуг дискриминантных кривых и дуг окружностей. В обоих случаях построенная означенным образом кривая $\Gamma_t^{\rho,>}$ отстоит от кривой Γ_t на расстояние $\rho > 0$ и является по отношению к Γ_t эквидистантой (параллелью) в классическом[35] или обобщенном (согласно приведенным в работе конструкциям) смысле.

В следующих параграфах изучены свойства поверхности

$$\Lambda^{\rho,>} = \bigcup_{t \in [t_0, \vartheta]} \Gamma_t^{\rho,>}.$$

регуляризации трехмерного множества, рассматриваемого как множество уровня функции. Здесь предполагается, что уравнение

$$\varphi^{(0)}(t, x_1, x_2) = 0$$

[35] *Бюшгенс С.С.* Дифференциальная геометрия. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы. 1940. 300 с.

задает замкнутую поверхность Λ, причем функция $\phi^{(0)}: R^3 \to R$ такова, что множество решений этого уравнения допускает параметризацию:

$$\Lambda = \left\{(t,x) \in R \times R^2 : x = r(\tau,t), \tau \in \left[\tau_1, \tau_2\right], t \in \left[t_0, \vartheta\right]\right\}.$$

При этом поверхность Λ является кусочно-гладкой.

Затем формируется отображение

$$\Phi_\rho : \left[\tau_1, \tau_2\right] \times \left[t_0, \vartheta\right] \to R^3,$$

регуляризующее поверхность Λ, а именно, формируется функция, ставящее в соответствие поверхности Λ гладкую по части переменных поверхность $\Lambda^{\rho,>}$, причем отстоящую в хаусдорфовой метрике от Λ на величину не большую ρ.

Приведены условия на вектор-функцию $r(\tau,t) = (a(\tau,t), b(\tau,t))$, а также на кривизну кривых, их которых «соткана» исходная поверхность Λ, при соблюдении которых сконструированная поверхность $\Lambda^{\rho,>}$ имеет улучшенные в части дифференцируемости свойства (**Теорема 4.1**).

В **§ 4.5** функция цены дифференциальной игры (9) рассмотрена как минимаксное решение задачи Коши для УГЯ, выписанного в операторной форме:

$$LD\varphi = 0$$

Здесь, $LD\varphi = \dfrac{\partial \varphi}{\partial t} + H\left(t, x, \nabla\varphi\right)$, $H\left(t,x,l\right) = \min\limits_{u \in P} \max\limits_{v \in Q} \left\langle l, f(t,x,u,v)\right\rangle$ – гамильтониан динамической системы.

Анализируется множество уровня функции цены $\varphi = \varphi^{(0)}(t,x) : \left[t_0, \vartheta\right] \times R^2 \to R$, т.е. решение уравнения

$$\varphi^{(0)}(t, x_1, x_2) = 0$$

Допускается предположение, что уравнение $\varphi^{(0)}(t, x_1, x_2) = 0$ задает замкнутую поверхность Λ, при этом имеет место параметризация

$$\Lambda = \left\{(t,x) \in R \times R^2 : x = r(\tau,t), \tau \in \left[\tau_1, \tau_2\right], t \in \left[t_0, \vartheta\right]\right\}.$$

Поверхность Λ является границей максимального стабильного моста $W \subset \left[t_0, \vartheta\right] \times R^2$. Затем выбирается параметр регуляризации $\rho > 0$ и строится поверхность $\Lambda^{\rho,>}$ как образ отображения Φ_ρ, описанного в параграфе 4.3.

Поверхность $\Lambda^{\rho,>}$ является границей множества W^{ρ}, причем $W \subset W^{\rho}$, т.е. множество W^{ρ} объемлет мост.

Исследуется изменение индекса стабильности объемлющего множества W^{ρ}. Индекс стабильности[36]

$$k(t,y) = \left\|\nabla\varphi\left(t,y\right)\right\|^{-1} LD\varphi\left(t,y\right)$$

является числовой величиной, характеризующей в зависимости от своего знака и модуля локальную меру стабильности или же нестабильности рассматриваемого множества.

Основной результат главы отражен в **Теореме 4.2,** согласно которой имеет место оценка

$$k(t,y) \le \left(1+\rho\chi\right)\lambda_H \rho$$

Здесь

- $\left(t,y\right) = \left(t, x + \rho\left\|\nabla\varphi^{(0)}\right\|^{-1}\nabla\varphi^{(0)}\right) \in \Lambda^{\rho,>}$,
- $(t,x) = (t, r(\tau,t))$ – точка гладкости Λ,
- $\nabla\varphi^{(0)} = \nabla\varphi^{(0)}\left(t,x\right)$ – градиент к сечению $\Lambda(t)$ поверхности Λ, вычисленный в точке $x = x(\tau,t)$,
- $\chi = \chi(\tau,t)$ – кривизна сечения $\Lambda(t)$ поверхности Λ в точке $x = x(\tau,t)$, $\lambda_H = \lambda_H(D) \in (0,+\infty)$ – константа Липшица гамильтониана по сопряженной (третьей) переменной в ограниченной области $D \subset \left[t_0, \vartheta\right] \times R^2$.

Таким образом, индекс стабильности множества, полученного деформацией максимального стабильного моста с помощью дискриминантных преобразований растет не более чем квадратичным образом относительно параметра регуляризации.

В **§ 4.6** описана процедура перехода от максимального стабильного моста W в одной известной нерегулярной дифференциальной игре, для которой решение известно в аналитической форме[37], к множеству W^{ρ}. Множество W^{ρ} построено с помощью дискриминантных преобразований с параметром регуляризации $\rho > 0$. Проведен численный эксперимент,

[36] *Ушаков В.Н., Малёв А.Г.* К вопросу о дефекте стабильности в игровой задаче о сближении // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т.16, №1. С.199-222.

[37] *Тарасьев А.М.* О построении функции цены в одной нерегулярной дифференциальной игре с фиксированным моментом окончания. Деп. в ВИНИТИ, № 2455-83. Свердловск, 1983. 43с.

найдены индексы стабильности в точках $\Lambda^{\rho,>}$. Результаты моделирования согласуются с теоретическими оценками, полученными в предыдущем параграфе.

В **§ 4.7** раскрыты детали моделирования решений дифференциальных игр в одном классе невыпуклых множеств с гладкой границей. В рамках подхода к построению решения дифференциальной игры в «мягкой постановке» на основе привлечения множеств различной геометрии предложены алгоритмы численного решения игровой задачи управления на плоскости в классе множеств, границы которых строятся гладким сопряжением дуг окружностей. Разработаны алгоритмы численного нахождения дефекта стабильности.

Основной теоретический результат параграфа заключен в **Лемме 4.6,** содержащей вывод формулы вычисления индекса стабильности множества, граница которого состоит из дуг окружностей**.** Практический и прикладной характер формулы продемонстрирован на примере известной дифференциальной игры, для которой с помощью этой формулы вычислен дефект стабильности множеств, границы которых имеет выше означенную структуру.

Автор выражает глубокую признательность члену-корреспонденту РАН Владимиру Николаевичу Ушакову за формирование научных интересов, многолетнее внимание к работе, действенную помощь и поддержку.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертации разработаны новые методы и предложены новые алгоритмы построения решений дифференциальных игр, задач оптимального управления, краевых задач для уравнений в частных производных первого порядка, в частности, для уравнений типа Гамильтона-Якоби и уравнений геометрической оптики.

Приведенная в диссертации характеризация невыпуклых замкнутых множеств связана с задачей выявления и построения сингулярных множеств при решении уравнений в частных производных типа эйконала, но при этом представляет самостоятельный интерес с точки зрения развития методов исследования множеств средствами негладкого анализа. Полученные здесь результаты могут обобщены, усилены и распространены на исследование минимаксных решений других типов уравнений в частных производных первого порядка.

Введенные обобщения производных, названные производными в силу диффеоморфизмов, перспективны в задачах по описанию и построению сингулярных множеств обобщенных решений уравнений в частных производных первого порядка и уравнений типа Гамильтона-Якоби.

Публикации по теме диссертации

А) Статьи, опубликованные в рецензируемых научных изданиях, определенных ВАК

1. *Тарасьев А.М., Успенский А.А., Ушаков В.Н.* Аппроксимационные операторы и конечно-разностные схемы для построения обобщенных решений уравнений Гамильтона-Якоби // Известия РАН. Техническая кибернетика. 1994. № 3. С.173-185.
2. *Папаков Г.В., Тарасьев А.М., Успенский А.А.* Численные аппроксимации обобщенных решений уравнений Гамильтона-Якоби // Прикл. математика и механика. 1996. Т.60, Вып.4. С.570-581.
3. *Grigor'eva S.V., Uspenskii A.A.* Degree of convergence of finite-difference operators while solving Cauchy problem for Hamilton-Jacobi Equations. Nonsmooth and discontinuous problems of control and optimization. Chelyabinsk, June, 17-20, 1998. Proceedings of the International Workshop / Under general edition V.D. Batukhtin; Chelyabinsk State University. Cheluabinsk, 1998. pp. 81-84.
4. *Пахотинских В.Ю., Успенский А.А., Ушаков В.Н.* Конструирование стабильных мостов в дифференциальных играх с фазовыми ограничениями // Прикл. математика и механика. 2003. Т.67, Вып.5. С.771-783.
5. *Ushakov V.N., Uspenskii A.A., Tokmantsev T.B.* Stable bridges in differential games in a finite time interval // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, Suppl. 2, 2004, pp. S168–S192.
6. *Григорьева С.В., Пахотинских В.Ю., Успенский А.А., Ушаков В.Н.* Конструирование решений в некоторых дифференциальных играх с фазовыми ограничениями // Мат. сб. 2005. Т. 196, №4. С. 51-78.
7. *Taras'ev A.M., Tokmantsev T.B., Uspenskii A.A., Ushakov V.N.* On procedures for constructing solutions in differential games on a finite interval of time // Journal of Mathematical Sciences. Springer New York. 2006. 139 (5). pp. 6954-6975.
8. *Успенский А.А., Лебедев П.Д.* Геометрия и асимптотика волновых фронтов // Изв. вузов. Математика. 2008. № 3. С. 27–37.
9. *Успенский А.А., Лебедев П.А.* Алгоритмы построения функции оптимального результата в задаче быстродействия с простой динамикой // Вестник Удмуртского университета. Математика, механика, компьютерные науки. 2008. Вып.2. С.152-154.
10. *Ушаков В.Н., Успенский А.А., Лебедев П.Д.* Построение минимаксного решения уравнения типа эйконала // Тр. Ин-та математики и механики УрО

РАН. 2008. Т.14, №2. С.182-191.
11. *Lebedev P.D., Uspenskii A.A.* Analytical and numerical construction of the optimal outcome function for a class of time-optimal problems // Computational Mathematics and Modeling. Springer New York. 2008. Vol. 19, No. 4. P.375-P386.
12. *Успенский А.А., Лебедев П.Д.* Условия трансверсальности ветвей решения нелинейного уравнения в задаче быстродействия с круговой индикатрисой // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т.14, № 4. С.82-100.
13. *Успенский А.А., Лебедев П.Д.* Процедуры вычисления меры невыпуклости плоского множества // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2009. Т. 49, №3, С. 431-440.
14. *Успенский А.А., Лебедев П.Д.* Построение функции оптимального результата в задаче быстродействия на основе множества симметрии // Автоматика и телемеханика. 2009. № 7. С. 50-57.
15. *Успенский А.А., Лебедев П.Д.* Построение решений динамических задач на основе множеств симметрии // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2009. Т.14, Вып.4. С. 733-735.
16. *Успенский А.А., Лебедев П.Д.* О множестве предельных значений локальных диффеоморфизмов при эволюции волновых фронтов // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т.16, №1. С.171-186.
17. *Лебедев П.Д., Успенский А.А.* Алгоритмы построения сингулярных множеств для одного класса задач быстродействия // Вестник Удмуртского университета. Математика, механика, компьютерные науки. 2010. Вып.3. С.30-41.
18. *Ушаков В.Н., Успенский А.А.* Дефект функций в дифференциальных играх с терминальной платой // Математическая теория игр и ее приложения. 2010. Т. 2, Вып. 2. С.99-128.
19. *Ушаков В.Н., Успенский А.А.* Об одном дополнении к свойству стабильности в дифференциальных играх // Тр. МИАН. 2010. Т. 271. С. 299–318.
20. *Ушаков В.Н., Успенский А.А., Малев А.Г.* Оценка дефекта стабильности множества позиционного поглощения, подвергнутого дискриминантным преобразованиям // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т.17, №2. С.209-224.
21. *Brykalov S.A., Lebedev P.D., Uspenskii A.A., Ushakov A.V.* Symmetry Sets in Construction of aMinimax Solution for a Bellman-Isaacs Equation, Proceedings of the 18th IFAC World Congress, Edited by S. Bittanti, A. Cenedese, S. Zampieri, Milan. 2011. Vol.18, Part 1. IFAC PapersOnLine Identifier: 10.3182/20110828-6-IT-1002.00744. http://www.ifac-papersonline.net/Detailed/51871.html.
22. *Ушаков В.Н., Успенский А.А., Зимовец А.А.* Оценка дефекта стабильности деформации множества позиционного поглощения в дифференциальной игре сближения-уклонения // Вестник Тамбовского университета. Серия:

Естественные и технические науки. Т. 16, Вып. 4. 2011. С. 1203-1204.

23. *Ушаков В.Н., Успенский А.А.* К свойству стабильности в дифференциальных играх // Доклады Академии наук. 2012. Т. 443, №5. С. 549-554.
24. *Ushakov, V., Uspenskii, A., Matviychuk, A., Malev, A.* Stability Defect of Sets in Game Problems of Approaching. Control Applications of Optimization. University of Bologna. Rimini. Italy. 2012. Volume 15, Part 1. IFAC PapersOnLine Identifier: 10.3182/20120913-4-IT-4027.00063. http://www.ifac-apersonline.net/Detailed/56627.html.
25. *Ушаков В.Н., Успенский А.А., Лебедев П.Д.* Геометрия сингулярных кривых для одного класса задач быстродействия // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10. 2013. Вып. 3. С. 157-167.
26. *Успенский А.А., Лебедев П.Д., Ушаков А.В.* Моделирование решений дифференциальных игр сближения-уклонения в классе множеств с ненулевым дефектом стабильности // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2013. Т. 18, Вып. 5-2. С. 2718-2719.
27. *Лебедев П.Д., Успенский А.А., Ушаков В.Н.* Алгоритмы наилучшей аппроксимации плоских множеств наборами кругов // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2013. Вып. 4. С. 88-99.
28. *Успенский А.А.* Необходимые условия существования псевдовершин краевого множества в задаче Дирихле для уравнения эйконала // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2015. Т.21, №1. С.250-263.
29. *Лебедев П.Д., Успенский А.А.* Применение многоточечных дифференциальных отношений для выявления сингулярностей решений уравнений гамильтонова типа // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2015. Т. 20, Вып. 5. С. 1261-1263.
30. *Uspenskii A. A.* Calculation formulas for nonsmooth singularities in a time-optimal problem of the optimal result function // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. 2015. Vol. 291, Suppl. 1, pp. S239–S254.
31. *Успенский А.А., Лебедев П.Д.* Построение сингулярных кривых для обобщенных решений уравнений типа эйконала в условиях разрыва кривизны границы краевого множества // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2016. Vol. 22, N 1. С. 282-293.
32. *Ушаков В.Н., Успенский А.А.* Альфа-множества в конечномерных евклидовых пространствах и их свойства // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2016. Т. 26. № 1. С. 95-120.
33. *Лебедев П.Д., Успенский А.А.* Построение функции оптимального результата и рассеивающих линий в задачах быстродействия с невыпуклым целевым множеством // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2016. Т.22, №2. С.188-198.

34. *Ушаков В.Н., Успенский А.А.* Теоремы об отделимости Альфа-множеств в евклидовом пространстве // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2016. Т.22, №2. С.277-291.

35. *Uspenskii A.A.* Derivatives with Respect to Diffeomorphisms and Their Applications in Control Theory and Geometrical Optics // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. 2016. Vol. 293, Suppl. 1. pp. S1–S16.

36. *Лебедев П.Д., Успенский А.А.* Алгоритмы построения оптимальных упаковок в трехмерном евклидовом пространстве // CEUR-WS. 2016. Vol.1662: Modern Problems in Mathematics and its Applications : 47th International Youth School-conference. Yekaterinburg. Russia. January 31 - February 6, 2016: proceedings. pp. 84–93.

37. *Lebedev P.D., Taras'ev A.M., Uspenskii A.A.* Construction of solution for optimal time problem under variable border smoothness for nonconvex target set. Proceedings of the 10th IFAC Symposium "Nonlinear Control Systems" NOLCOS 2016. Monterey. USA. 23-25 August. 2016. IFAC-PapersOnLine. pp. 386-391. ISSN 1474-6670, ISSN 2405-8963.

Б) Другие публикации

38. *Grigorjeva S.V., Tarasjev A.M., Ushakov V.N., Uspenskii A.A.* Constructions of nonsmooth analysis in numerical methods for solving Hamilton-Jacobi Equations // Nova Journal of mathematics, game theory, and algebra. Nova Science Publishers, Inc., New York, U.S.A. 1996, V 6. №1. pp. 27-43.

39. *Grigor'eva S.V., Taras'ev, Uspenskii A.A., Ushakov V.N.* Construction of the differential game theory for solving the Hamilton-Jacobi eguations. Proc. Steklov Inst. Math: Problems Control Dynam. Systems. 2000. Suppl. Issue 2. pp.38-53

40. *Grigor'eva S.V., Ushakov V.N., Uspenskii A.A.* Approximation schemes for solving differential games and Hamilton-Jacobi equations // Preprints of the eleventh IFAC international workshop. Volume 2. 2000. pp. 114-117

41. *Grigorieva S.V., Ushakov V.N. and Uspenskii A.A.* Solution of differential games and Cauchy problem for Hamilton-Jacobi equation // in Proceedings of the Tenth IFAC Symposium On Dynamic Games And Applications. July 8-11. Saint-Petersburg. Russia. 2002, Vol. 1. Petrosjan L.A. and Zenkevich N.A., Eds., International Society of Dynamic Games. Saint-Petersburg State University. St. Petersburg. 2002. pp. 349-352.

42. *Grigor'eva S.V., Ushakov V.N., Uspenskii A.A.* Constructing solutions of differential games and Hamilton-Jacobi equations // 8th International Symposium on Dynamic Games and Applications. July 5-8. 1998. Chateau. Vaalsbroek. Maastricht. The Neterlands. P. 234.

43. *Григорьева С.В., Тарасьев А.М, Успенский А.А., Ушаков В.Н.* Конструкции теории диференциальных игр при решении уравнений Гамильтона-Якоби // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2000. Т.6, №2. С.320-336.

44. *Успенский А.А., Ушаков В.Н., Фомин А.Н.* Альфа-множества и их свойства / Ин-т математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 2004. 62 с. Деп. в

ВИНИТИ 02.04.04, № 543-В2004.
45. *Успенский А.А.* Аналитические методы вычисления меры невыпуклости плоских множеств / Ин-т математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 2007. 21 с. Деп. в ВИНИТИ 07.02.07, № 104-В2007.
46. *Успенский А.А., Лебедев П.Д.* Аналитическое и численное конструирование функции оптимального результата для одного класса задач быстродействия // Прикладная математика и информатика: Труды факультета ВМиК МГУ М.В. Ломоносова. М.: МАКС Пресс. 2007. № 27. С. 65-79.
47. *Успенский А.А., Лебедев П.Д.* Исследование геометрии и асимптотики волновых фронтов в некоторых задачах управления // Труды 9-ой Международной Четаевской конференции. Иркутск. 2007. Т. 5. С. 224-236.
48. *Успенский А.А.* Оценка скорости сходимости разностных операторов при решении задачи Коши для уравнения Гамильтона-Якоби. Екатеринбург, 1998. 38 с. Деп. в ВИНИТИ 06.03.98. № 623-В98.
49. *Успенский А.А.* Спектр производных локальных диффеоморфизмов при эволюции волновых фронтов в задаче быстродействия // Вiсник Київського нацiонального унiверситету iменi Тараса Шевченко. Abstracts of Conference Reports «Dynamical Systems Modeling and Stability Investigation». Kiev, Ukraine. May 25-27. 2011. P.382.
50. *Успенский А.А., Лебедев П.Д.* Условия гладкости множества симметрии минимаксного решения одного уравнения Айзекса-Беллмана // Проблемы динамического управления: Сборник научных трудов факультета ВМиК МГУ М.В. Ломоносова. М.: МАКС Пресс. 2008. Вып. 3. С. 231 - 245.
51. *Успенский А.А., Лебедев П.Д., Васев П.А.* Аппроксимация негладкой функции оптимального результата в одном классе задач быстродействия // Вестник Челябинского государственного университета. Математика. Механика. Информатика. 2013. Вып. 16. С.71-77.
52. *Успенский А.А., Лебедев П.Д.* Численно-аналитические методы построения обобщенных решений уравнений в частных производных типа Гамильтона-Якоби [электронный ресурс]// Труды XI Международной конференции «Забабахинские научные чтения», Снежинск, 16-20 апреля 2012 г., С.1-33. – Электронная статья (476 Кб). Режим доступа: http://www.vniitf.ru/images/zst/2012/s6/6-4.pdf.
53. *Успенский А. А., Лебедев П.Д.* Вырожденность условий второго порядка при построении псевдовершин краевого множества для уравнения эйконала // Вестник Гуманитарного университета. 2016. № 2. С. 31–46.
54. *Токманцев Т.Б., Успенский А.А., Ушаков В.Н.* Численные аппроксимации стабильных мостов в дифференциальных играх на конечном промежутке времени // Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона-Якоби. Труды международного семинара, посвященного 60-летию академика А.И. Субботина, Екатеринбург. 2006. Т.1. С. 294-302.